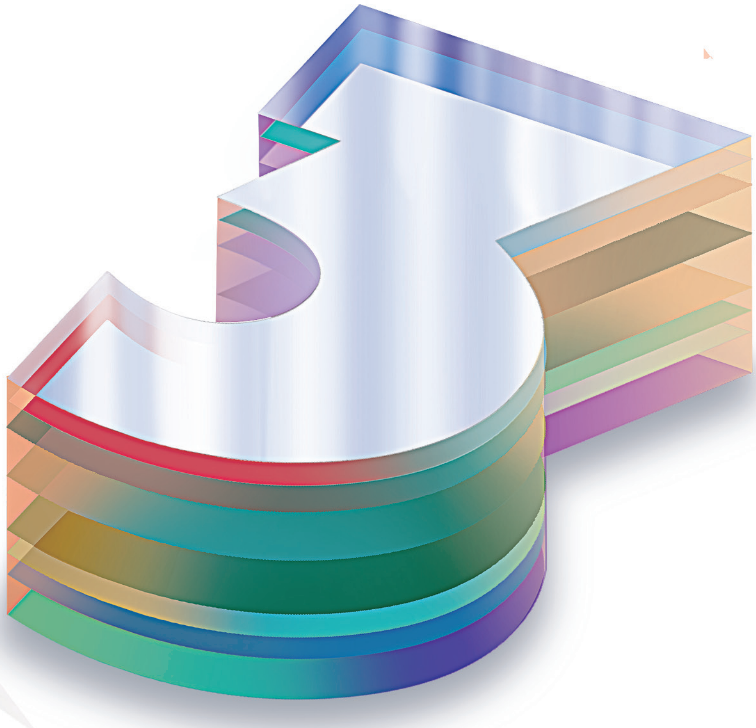
Razonamiento Matemático

Tercer grado
de Secundaria



Editorial San Marcos

Lexicom

Intelectum
EVOLUCIÓN

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Razonamiento matemático
Tercer grado de Secundaria
Colección Intelectum Evolución

© Ediciones Lexicom S. A. C. - Editor
RUC 20545774519
Jr. Dávalos Lissón 135, Cercado de Lima
Teléfonos: 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
Fax: 330 - 2405
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com
www.editorialsanmarcos.com

Responsable de edición:
Yisela Rojas Tacuri

Equipo de redacción y corrección:
Eder Gamarra Tiburcio / Jhonatan Peceros Tinco
Josué Dueñas Leyva / Saby Camacho Martinez
Óscar Díaz Huamán

Diseño de portada:
Miguel Mendoza Cruzado / Cristian Cabezudo Vicente

Retoque fotográfico:
Luis Armestar Miranda

Composición de interiores:
Miguel Lancho / Carol Clapés Hurtado / Melissa Chau /
Cristian Cabezudo / Vilma Jacquelín Añazco /
Lourdes Zambrano Ibarra

Gráficos e Ilustraciones:
Juan Manuel Oblitas / Ivan Mendoza Cruzado

Primera edición: 2013
Tiraje: 9000

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.° 2013-18811
ISBN: 978-612-313-116-6
Registro de Proyecto Editorial N.° 31501001300694

Impreso en Perú / *Printed in Peru*

Pedidos:
Av. Garcilaso de la Vega 978 - Lima.
Teléfonos 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com

Impresión:
Industria Gráfica Cimagraf S.A.C.
Psje. Santa Rosa 220 - 226 N.º 220, Santa Angélica, Lima, ATE
RUC 20136492277

INTELECTUM
Razonamiento matemático

Presentación

El vocablo *razonamiento* proviene del verbo *razonar* que significa 'inferir, conjeturar ordenando ideas en la mente para llegar a una conclusión'.

De esta manera podemos afirmar que el razonamiento matemático es aquella disciplina académica que basada en los conocimientos de la matemática busca desarrollar las aptitudes y las habilidades lógicas de los estudiantes para deducir una solución a un problema, para sacar una consecuencia de algo por indicios y conducir a un resultado.

Teniendo en consideración cuán importante es potenciar las habilidades, hemos elaborado el libro de Razonamiento matemático como un instrumento pedagógico que conllevará a esta meta. La estructura de cada libro está diseñada de acuerdo a los nuevos lineamientos de la educación cuyo objetivo es que todos desarrollen la capacidad de pensar, creativa y críticamente y procesen de manera exitosa los conocimientos.

Nuestra propuesta pedagógica se inicia con páginas binarias conformadas por una lectura de contexto matemático que motivará al estudiante a conectarse con este conocimiento al corroborar que le servirá y le será imprescindible en su vida actual y futura. Complementan las binarias la sección *Matemática recreativa*, que propone un problema cuyas pautas para solucionarlo se darán a través de un diálogo entre los personajes de la colección (mediadores cognitivos).

Continúa el *Marco teórico* desarrollado de manera clara y precisa en cuatro unidades, que tienen como soporte los problemas resueltos, donde desarrollamos diversas estrategias que entrenarán las capacidades específicas del estudiante.

Todo este marco teórico es aplicado a la práctica a través de dos secciones:

Actividades de razonamiento, para que el estudiante inicie la aplicación del conocimiento procesado. Al final de cada actividad hay un reto. Y la sección *Refuerza practicando*, que afianzará aún más la práctica con problemas propuestos por niveles, para que el avance sea de modo progresivo y se pueda ser capaz de afrontar nuevos y grandes retos.

Todo lo propuesto en la colección contiene situaciones de aprendizaje variadas que permitirán obtener resultados cualitativos y cuantitativos en el proceso cognoscitivo de los estudiantes.

Nuestro firme propósito es formar jóvenes capacitados, preparados, competitivos, eficientes y eficaces.

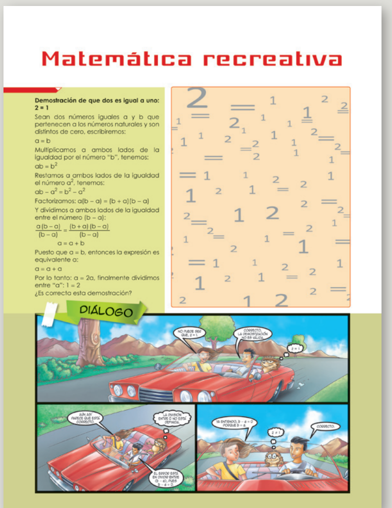
¡A esforzarse y a triunfar!

Estructura del libro

Página que inicia la unidad

Conformada por una lectura matemática de contexto cotidiano que conducirá al estudiante a una motivación concreta al comprobar que la matemática está asociada a su entorno real.



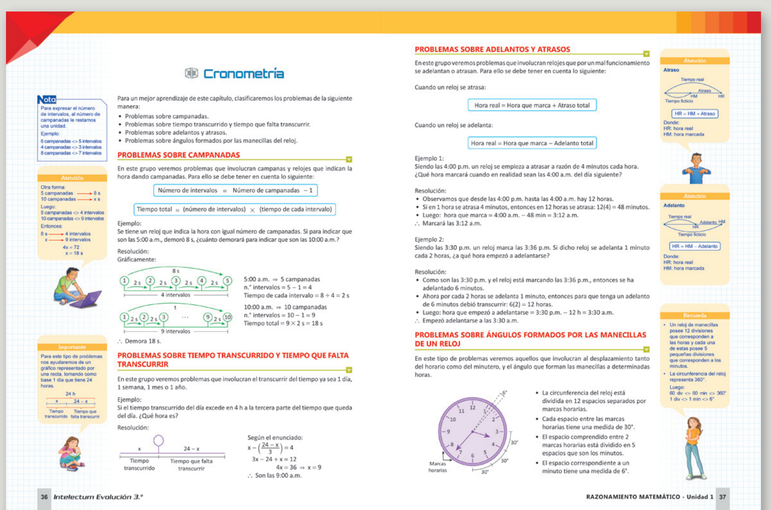


Matemática recreativa

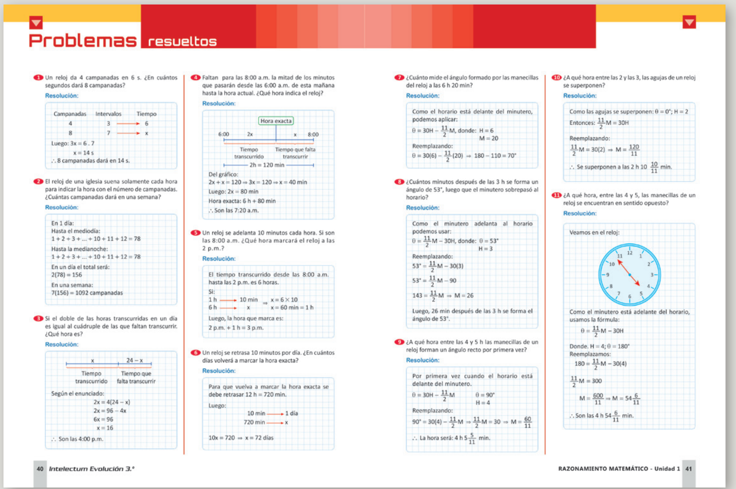
Sección que inicia de manera entretenida y divertida los conocimientos con un problema matemático que a través de un diálogo entre los personajes de la colección (mediadores cognitivos) se proporcionarán las pautas para solucionarlo.

Contenido teórico

Compuesto por una variedad de conocimientos enfocados en el razonamiento aritmético, razonamiento algebraico y razonamiento geométrico los que a su vez ponen en práctica el razonamiento lógico abstracto, el razonamiento operativo y el razonamiento organizativo. El desarrollo de cada tema se ha hecho con criterio pedagógico teniendo en cuenta el grado académico.

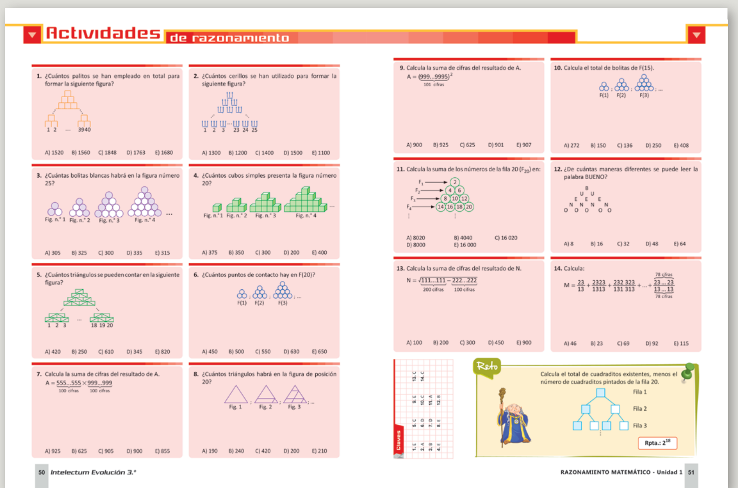






Problemas resueltos

Gran cantidad de problemas desarrollados por tema donde aplicamos diversas estrategias que entrenarán las capacidades del estudiante.



Actividades de razonamiento

Actividades propuestas para que el estudiante empiece su entrenamieto del conocimiento procesado; son actividades elaboradas también por tema. Al final de cada actividad hay un reto que el alumno debe intentar resolver.

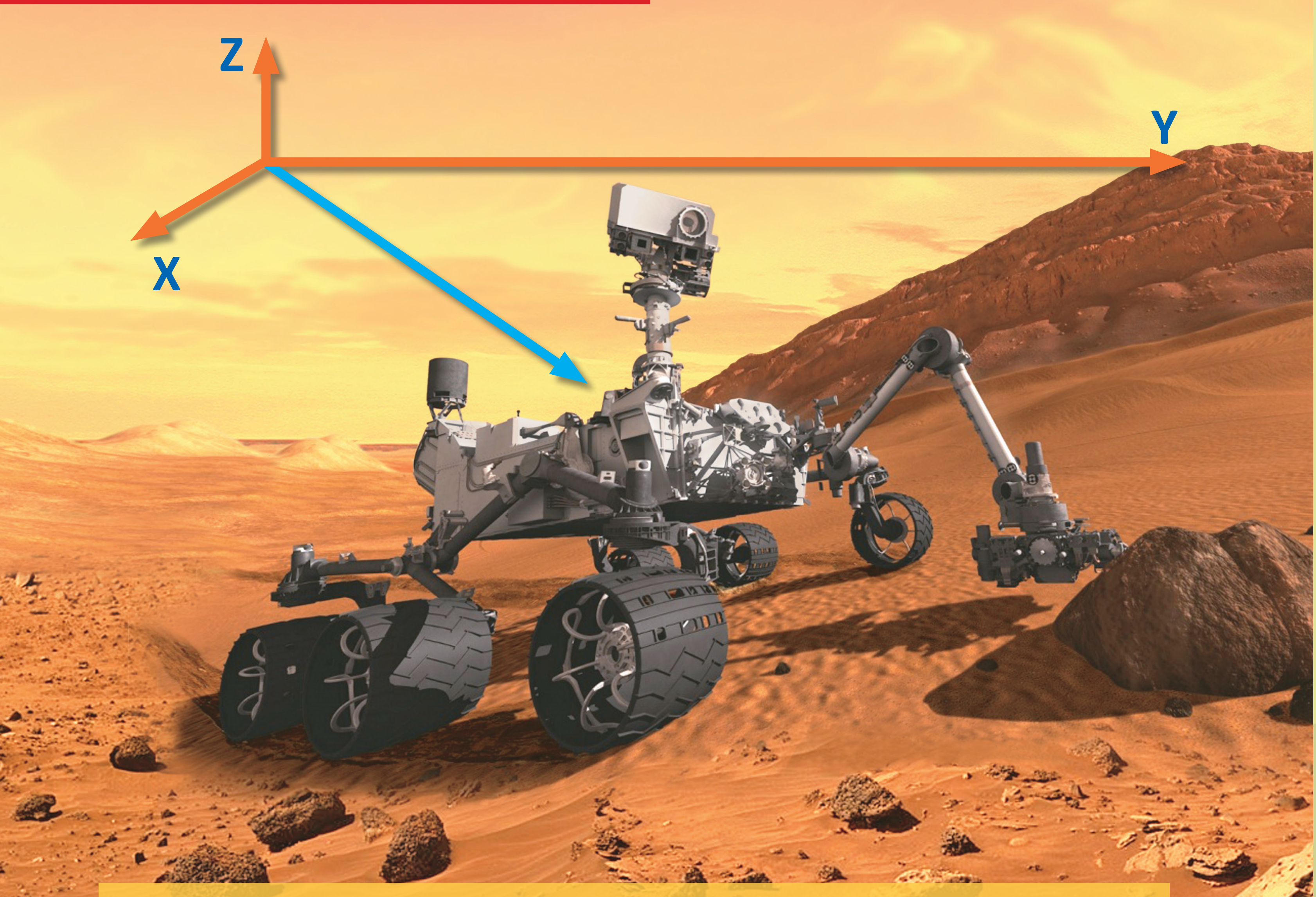


Refuerza practicando

Problemas clasificados en niveles con la finalidad de que el alumno refuerce en forma progresiva y llegue preparado para enfrentarse a grandes y nuevos retos.

Contenido

UNIDAD 1



Curiosity

La *Mars Science Laboratory* (abreviada MSL), conocida como *Curiosity*, del inglés "curiosidad", es una misión espacial que incluye un astromóvil de exploración marciana dirigida por la NASA. Fue lanzado el 26 de noviembre del 2011, aterrizó en Marte exitosamente en el cráter Gale el 6 de agosto del 2012.

La misión se centra en situar sobre la superficie marciana un vehículo explorador. Este vehículo es tres veces más pesado y dos veces más grande que los vehículos utilizados en la misión del 2004. Una vez en el planeta, el astromóvil tomó fotos para mostrar que amartizó con éxito. En el transcurso de su misión tomará decenas de muestras de suelo y polvo rocoso marciano para su análisis. La duración prevista de la misión es de 1 año marciano (1,88 años terrestres). Con un radio de exploración mayor que los vehículos enviados anteriormente. Investigará la capacidad pasada y presente de Marte para alojar vida.

Matemática recreativa

Demostración de que dos es igual a uno: 2 = 1

Sean dos números iguales a y b que pertenecen a los números naturales y son distintos de cero, escribiremos:

$a = b$

Multiplicamos a ambos lados de la igualdad por el número "b", tenemos:

$ab = b^2$

Restamos a ambos lados de la igualdad el número a^2, tenemos:

$ab - a^2 = b^2 - a^2$

Factorizamos: $a(b - a) = (b + a)(b - a)$

Y dividimos a ambos lados de la igualdad entre el número $(b - a)$:

$$\frac{a(b-a)}{(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{(b-a)}$$

$$a = a + b$$

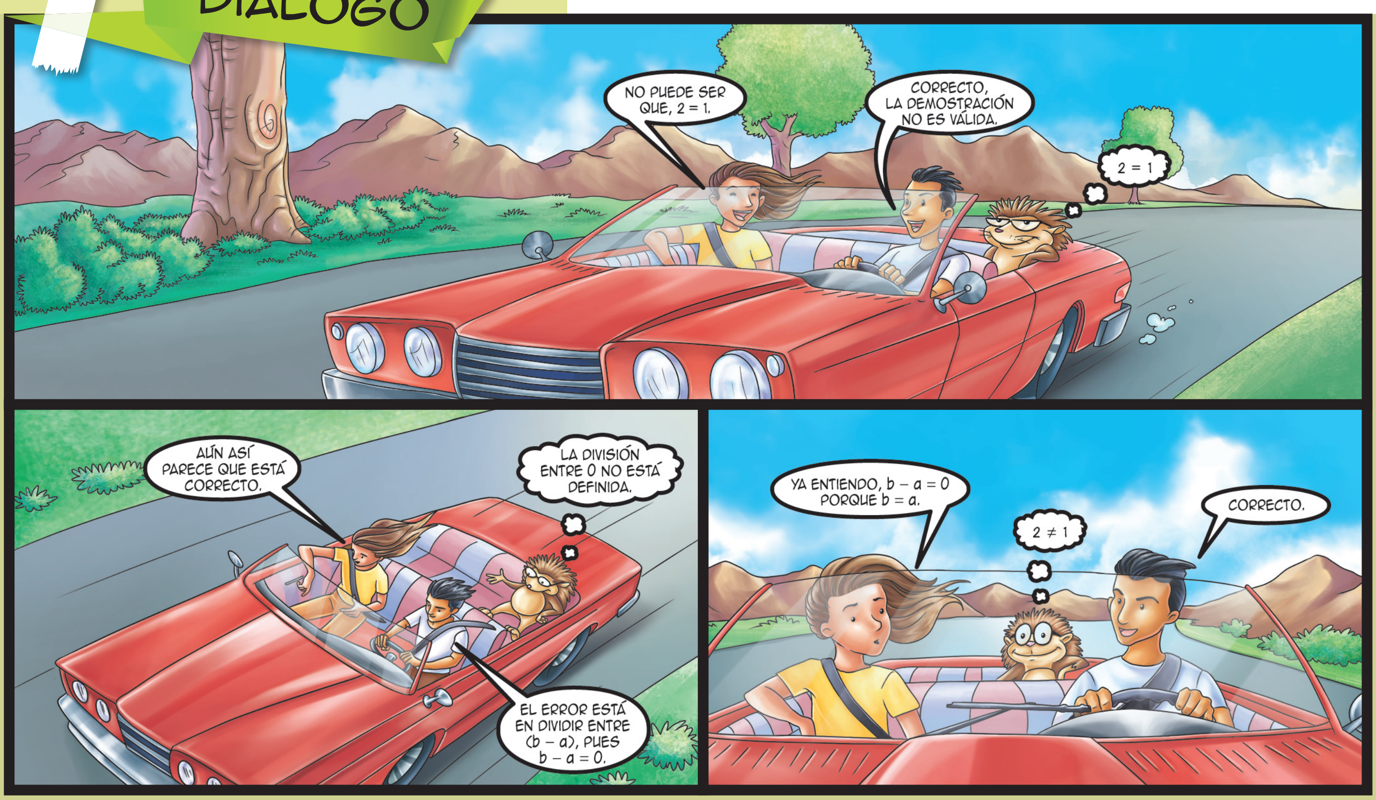
Puesto que $a = b$, entonces la expresión es equivalente a:

$a = a + a$

Por lo tanto: $a = 2a$, finalmente dividimos entre "a": $1 = 2$

¿Es correcta esta demostración?

DIÁLOGO



Planteo de ecuaciones

Nota

Por lo general, cuando se quiere representar una cantidad se emplea la letra x, que representa la incógnita de la ecuación.

Ejemplo:
Mi dinero: "x"



Importante

Cuando se tenga una cantidad impar de números consecutivos, se toma x como número central y luego se obtienen los demás hacia adelante y hacia atrás. Veamos algunos ejemplos:

- Tres números enteros consecutivos
  $x - 1$, x; $x + 1$
- Tres números pares o impares consecutivos
  $x - 2$; x; $x + 2$
- Cinco números enteros consecutivos
  $x - 2$; $x - 1$; x; $x + 1$; $x + 2$
- Cinco números pares o impares consecutivos
  $x - 4$; $x - 2$; x; $x + 2$; $x + 4$

Atención

A es a B como 2 es a 3 se puede expresar como:

- A y B son proporcionales a 2 y 3.
- A es a 2 como B es a 3.
- A y B están en la razón o relación de 2 a 3.



Para resolver un problema de planteo de ecuaciones se debe entender la lectura del problema, si es posible relacionarlo con la realidad y a partir de ahí traducir el enunciado verbal a una expresión matemática.

PLANTEO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Debemos tener presente el siguiente procedimiento elemental para el planteo y resolución de un problema sobre ecuaciones.

1. Traducir el enunciado, de la forma verbal a la forma simbólica. Aunque a veces será necesario definir previamente algunas variables.
2. Resolver las ecuaciones.
3. Dar respuesta al problema (el valor de la incógnita no necesariamente es la respuesta al problema).

A continuación veamos algunos ejemplos de cómo se traducen los enunciados de la forma verbal a expresiones matemáticas.

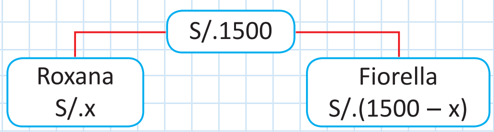
	Enunciado (forma verbal)	Expresión matemática
1	La suma de tres números consecutivos es 153.	$x + x + 1 + x + 2 = 153$
2	La edad de Lalo es dos veces la edad de Beatriz.	Lalo = 2x, Beatriz = x
3	La edad de Lalo es dos veces más que la edad de Beatriz.	Lalo = 3x, Beatriz = x
4	El triple de un número, aumentado en 20.	$3x + 20$
5	El triple de un número aumentado en 20.	$3(x + 20)$
6	El exceso de A sobre B es 50.	$A - B = 50$
7	Yo tengo la mitad de lo que tú tienes y él el triple de lo que tú tienes.	Yo = x; Tú = 2x, Él = 6x
8	En una fiesta hay tantos hombres como el doble del número de mujeres.	H = 2x M = x
9	He comprado tantos pantalones como soles cuesta cada uno.	Compro x pantalones c/u cuesta S/.x
10	La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 74.	$(x + 1)^2 + (x + 3)^2 = 74$
11	La suma de tres números pares consecutivos es 2400.	$x + x + 2 + x + 4 = 2400$
12	La suma de tres números impares consecutivos es 2100.	$a + (a + 2) + (a + 4) = 2100$
13	Gasté los 2/3 de lo que no gasté.	No gasté = x; Gasté = $\frac{2}{3}x$
14	A es a B como 3 es a 5.	$\frac{A}{B} = \frac{3}{5}$
15	Por cada 2 fichas rojas tengo 3 fichas azules.	$\frac{R}{A} = \frac{2}{3}$; R = 2k A = 3k

Problemas resueltos

1 Entre Roxana y Fiorella tienen S/.1500. Si Roxana le da S/.100 a Fiorella, está tendría el doble de lo que le queda a Roxana. ¿En cuánto se diferencia lo que tienen ambas personas?

Resolución:

Realizando un esquema:



Dato: Roxana le da S/.100 a Fiorella

Roxana tendrá: S/.(x – 100)

Fiorella tendrá: S/.(1500 – x + 100)

Por condición del problema:

$$1500 - x + 100 = 2(x - 100)$$
$$1600 - x = 2x - 200$$
$$1800 = 3x \Rightarrow x = 600$$

Entonces: $1500 - x = 1500 - 600 = 900$

Luego, Roxana: S/.600; Fiorella: S/.900

Piden: S/.900 – S/.600 = S/.300

2 Un cazador le preguntó a una paloma: "¿Cuántas son ustedes?", esta contestó: "Nosotras, más nosotras, más nosotras, más la mitad de nosotras, más 1/4 de nosotras, más los 3/8 de nosotras, más usted somos 100?"

Resolución:

Sea "P" el número de palomas.

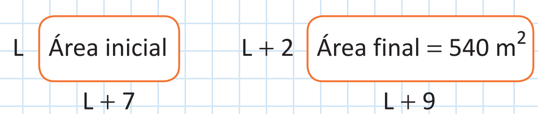
Por condición del problema:

$$P + P + P + \frac{P}{2} + \frac{P}{4} + \frac{3}{8}P + 1 = 100$$
$$3P + \frac{4P + 2P + 3P}{8} = 99$$
$$3P + \frac{9}{8}P = 99$$
$$\frac{33}{8}P = 99 \Rightarrow P = 24$$

∴ Son 24 palomas.

3 El largo de un rectángulo excede al ancho en 7 m. si cada dimensión se aumenta en 2 m, el área es igual a 540 m^2. ¿Cuál es el área inicial del rectángulo?

Resolución:



Por dato: $(L + 9)(L + 2) = 540 = 27 \times 20$

$$L = 18$$

Piden el área inicial $= L(L + 7) = 18(25) = 450\ m^2$

4 Un lapicero cuesta S/.8 y un lápiz S/.5. Se quiere gastar exactamente S/.96, de manera de poder adquirir la mayor cantidad posible de lapiceros y lápices. ¿Cuál es este número?

Resolución:

Cantidad de lapiceros: x

Cantidad de lápices: y

Por dato del problema: $8x + 5y = 96$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 7 & 8 \end{array}$$

∴ La mayor cantidad será: $7 + 8 = 15$

5 Se reparten 400 manzanas en cantidades iguales a un grupo de niños. Si hubiese 5 niños más, entonces a cada niño le tocaría 4 manzanas menos. ¿Cuántos niños son?

Resolución:

Sea "x" la cantidad de niños.

Lo que recibe cada niño: $\frac{400}{x}$

Si hubiese 5 niños más recibirán: $\frac{400}{x + 5}$

Por condición del problema:

$$\frac{400}{x} - \frac{400}{x + 5} = 4$$
$$400x + 2000 - 400x = 4x(x + 5)$$
$$2000 = 4x(x + 5)$$
$$500 = x(x + 5)$$
$$20 \times 25 = x(x + 5) \Rightarrow x = 20$$

∴ Son 20 niños.

6 La suma de la quinta parte de un número con los 3/8 del número excede en 49 al doble de la diferencia entre 1/6 y 1/12 del número. Halla el número.

Resolución:

Sea "x" el número.

Por condición del problema:

$$\frac{x}{5} + \frac{3}{8}x - 2\left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{12}x\right) = 49$$
$$\frac{23}{40}x - \frac{x}{6} = 49$$
$$\frac{98x}{240} = 49 \Rightarrow x = 120$$

∴ El número es 120.

Actividades de razonamiento

1. En un hotel de dos pisos hay 48 habitaciones. Si las habitaciones del segundo piso son la mitad de las del primero, ¿cuántas habitaciones hay en el segundo piso?

A) 40 B) 20 C) 8 D) 16 E) 32

2. La diferencia de dos números es 30. Si el mayor se disminuye en 10, se tiene el triple del menor. Halla el producto de los números dados.

A) 400 B) 330 C) 220 D) 450 E) 200

3. De los animales que hay en un corral, la mitad son gallinas, la tercera parte patos, la décima parte pavos, y 150 son pollos. ¿Cuántos animales hay en el corral?

A) 2250 B) 2230 C) 1236 D) 1230 E) 2000

4. En un zoológico hay 50 animales entre felinos y aves. Si se cuentan el número total de patas (extremidades) da 160, ¿cuál es el número de felinos?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 25 E) 10

5. Un comerciante adquirió polos de dos calidades, unos de 15 soles y otros de 18 soles. Pagó 600 soles por la compra de un total de 36 polos. Determina la cantidad de polos que adquirió a 18 soles.

A) 20 B) 30 C) 15 D) 6 E) 16

6. Ruth tenía cierta suma de dinero. Gastó 30 soles en libros y los 3/4 de lo que le quedaba en ropa. Si le queda 30 soles, ¿cuánto tenía al principio?

A) 120 B) 140 C) 100 D) 180 E) 150

7. El exceso de 8 veces un número sobre 60, equivale al exceso de 60 sobre 7 veces el número. Calcula dicho número.

A) 14 B) 15 C) 8 D) 9 E) 7

8. Lo que tengo más lo que debo es 2200 soles. Si pagara lo que debo, me quedaría 1000 soles. ¿Cuánto debo?

A) S/.300 B) S/.900 C) S/.500
D) S/.600 E) S/.1000

9. Halla un número, donde la suma de su mitad, cuarta y octava parte, resulta dicho número disminuido en la unidad.

A) 7 B) 6 C) 4 D) 8 E) 5

10. Entre cierto número de personas compran un auto que cuesta S/.1200; el dinero que paga cada uno excede en 194 al número de personas. ¿Cuántas personas compran el auto?

A) 6 B) 7 c) 8 D) 5 E) 4

11. Yo tengo el cuádruple de lo que tú tienes. Si tú tuvieras S/.5 más de lo que tienes yo tendría 2 veces más de lo que tú tendrías. ¿En cuánto se diferencian nuestras cantidades?

A) S/.45 B) S/.40 C) S/.10
D) S/.30 E) S/.50

12. Cuatro hermanos tienen 300 manzanas. Si el número de manzanas del primero, se incrementa en 1, el segundo se reduce en 4, el del tercero se duplica y el del cuarto se reduce a la mitad, todos tendrían la misma cantidad. Halla la cantidad de manzanas del tercero.

A) 70 B) 132 C) 65
D) 40 E) 33

13. En una granja se tienen pavos, gallinas y patos; sin contar las gallinas tenemos 5 aves, sin contar los pavos tenemos 7 aves y sin contar los patos tenemos 4 aves, luego el número de pavos es:

A) 3 B) 2 C) 1 D) 4 E) 5

14. En un terreno de forma rectangular el largo excede en 6 metros al ancho. Si el ancho se duplica y el largo disminuye en 8 metros el área del terreno no varía. ¿Cuál es el perímetro del terreno?

A) 52 m B) 13 m C) 10 m
D) 23 m E) 17 m

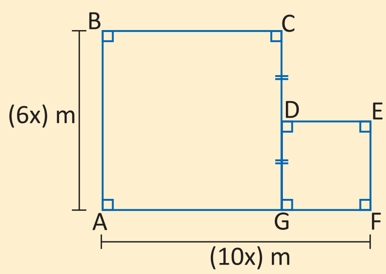
Claves

1. D	5. A	9. D	13. C
2. A	6. E	10. A	14. A
3. A	7. C	11. A	
4. B	8. D	12. E	

Reto

De la figura adjunta: CD = DG





Su perímetro es 64 m. Halla su área.

Rpta.: 192 m^2

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Tres cestos contienen 575 manzanas. El primer cesto tiene 10 manzanas más que el segundo y 15 más que el tercero. ¿Cuántas manzanas hay en el segundo cesto?

   A) 190 B) 188 C) 176 D) 197 E) 181

2. Halla el número cuyo triple, aumentado en 4, sea igual al duplo del mismo número, aumentado en 14.

   A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

3. Don Santiago tiene 35 años y su hijo 5 años. ¿Dentro de cuántos años la edad del hijo será igual a los 2/5 de la edad del padre?

   A) 14 B) 15 C) 13 D) 12 E) 11

4. De los animales que hay en un corral, la mitad son gallinas, la quinta parte patos, la novena parte pavos, y 510 son pollos. ¿Cuántos animales hay en el corral?

   A) 2750 B) 2700 C) 2650
   D) 2950 E) 2500

5. 

   Un granjero al morir dejó 35 vacas para que sean repartidas entre sus tres hijos de la siguiente manera: al mayor la mitad, al segundo la tercera parte y al tercero la novena parte. Como no se podía efectuar el reparto consultaron a un granjero vecino, el cual trajo una vaca de las suyas y la puso con las demás y de esa manera pudo concretarse el reparto. Determina cuántas vacas le toca a uno de ellos y con cuántas se retiró el vecino.

   A) 12 y 1 B) 16 y 2 C) 18 y 1
   D) 18 y 2 E) 17 y 3

6. Caperucita Roja va por el bosque llevando una cesta con manzanas para su abuelita; si en el camino la detiene el lobo y le pregunta: "¿Cuántas manzanas llevas en tu cesta?". Caperucita le responde: "Llevo tantas decenas como el número de docenas más uno". ¿Cuántas manzanas llevaba Caperucita en su cesta?

   A) 30 B) 6 C) 120 D) 60 E) 19

7. 

   A cierto encuentro futbolístico, asistió cierto número de espectadores, pagando cada uno S/.5 por entrada. En el encuentro de revancha asistió el triple de espectadores que en la primera vez y cada uno pagó ahora S/.8 por entrada. Si en la segunda recaudación se recibió S/.380 000 más que en la primera. ¿Cuántos espectadores asistieron al segundo encuentro?

   A) 6000 B) 20 000 C) 60 000
   D) 40 000 E) 45 000

8. Se compraron 24 kg de productos entre azúcar y arroz. Si un kilogramo de azúcar cuesta 3 soles y un kilogramo de arroz cuesta S/.2. ¿Cuántos kilogramos de arroz se compró si el gasto total fue S/.64?

   A) 8 B) 16 C) 15 D) 9 E) 12

9. Una familia compuesta de ocho miembros entre adultos y niños asiste a un espectáculo por el cual el adulto paga S/.8 y un niño paga S/.5. Si el papá invirtió S/.49 por este buen espectáculo, ¿cuántos adultos y cuántos niños componen esta familia?

   A) 4 niños y 4 adultos B) 5 niños y 3 adultos
   C) 2 niños y 6 adultos D) 6 niños y 2 adultos
   E) 3 niños y 5 adultos

10. Un aula está compuesta por 40 alumnos entre hombres y mujeres. Si el triple de la cantidad de hombres excede en 8 a la mitad de la cantidad de mujeres, ¿cuál es la cantidad de hombres que hay en la sección?

    A) 8 B) 10 C) 12
    D) 14 E) 16

NIVEL 2

11. Un número es el cuádruple de otro. Si se aumenta cada uno en seis, el producto aumenta en 456. Calcula dichos números y da como respuesta la suma de ellos.

    A) 70 B) 60 C) 50
    D) 40 E) 30

12. La suma de tres números es 14 250, el primero es al segundo como 11 a 3 y su diferencia 600. ¿Cuál es el menor número?

    A) 115 B) 225 C) 325
    D) 455 E) 450

13. Dos números están en la razón de 4 a 3. La mitad del mayor excede a la tercera parte del menor en 5. Encuentra el mayor.

    A) 5 B) 10 C) 20 D) 30 E) 40

14. La suma de dos números enteros consecutivos es igual a los 5/4 del primero, aumentada en los 49/64 del segundo. ¿Cuáles son los números?

    A) 16 y 17 B) 20 y 21 C) 22 y 23
    D) 15 y 16 E) 17 y 18

15. Al preguntar un padre a su hijo cuánto gastó de los 350 soles que le dio, este le contesta: “Las tres cuartas partes de lo que no gasté”. ¿Cuánto le queda?

    A) S/.150 B) S/.200 C) S/.250
    D) S/.300 E) S/.220

16. Halla dos números consecutivos, si sabemos que los 5/6 del menor al ser sumados con los 7/9 del mayor, nos da 33 de resultado. Da el menor de ellos.

    A) 19 B) 21 C) 24 D) 26 E) 20

17. Si un chocolate cuesta S/.1,50 y un caramelo cuesta S/.0,50; entonces con S/.6,50 puedo comprar:

    A) 1 caramelo y 5 chocolates
    B) 1 caramelo y 4 chocolates
    C) 3 caramelos y 2 chocolates
    D) 4 caramelos y 3 chocolates
    E) Más de una es correcta

NIVEL 3

18) Un club deportivo está formado por futbolistas y basquetbolistas. El número de socios futbolistas es cinco veces el número de socios basquetbolistas. Si un socio futbolista paga S/.100 de cuota mensual y el basquetbolista S/.200, determina el número de socios basquetbolistas, si el ingreso mensual del club por este concepto asciende a S/.280 000.

A) 400 B) 700 C) 500
D) 800 E) 600

19) Juan y Julio, dos amigos muy unidos, tienen juntos S/.600. Juan le dice a Julio: "Si me dieras un billete como este, tendríamos cada uno la misma cantidad". Julio responde: "Si tú me dieras el billete que estás mostrando, tendría dos veces lo que te queda". ¿De cuántos soles era el billete que mostraba Juan?



A) S/.100 B) S/.50 C) S/.20
D) S/.10 E) S/.200

20) Se desea repartir "L" libros entre dos alumnos, P y Q, en forma proporcional a "m" y "n", respectivamente. ¿Cuántos libros le corresponden al alumno?

A) $\frac{mL}{m-n}$ B) $\frac{mL}{m+n}$ C) $\frac{nL}{m+n}$

D) $\frac{nL}{m-n}$ D) $\frac{(m-n)}{m+n}L$

21) La diferencia de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 424. Halla el mayor de ellos.

A) 99 B) 69 C) 107
D) 89 E) 100

22) Perdí los 3/5 de lo que tenía, si hubiera perdido los 2/3 de lo que perdí, tendría S/.10 más de lo que tengo. ¿Cuánto tenía?

A) S/.20 B) S/.30 C) S/.40
D) S/.50 E) S/.60

23) Si a la mitad de los días del año transcurrido se le agrega la tercera parte de lo que falta para acabar el año, se obtiene el número de días transcurridos. ¿Qué fecha es?

A) 26 de mayo B) 27 de mayo
C) 26 de junio D) 27 de junio
E) 23 de mayo

24) Para sufragar sus gastos una promoción escolar hace los cálculos siguientes: si cada uno de ellos da S/.750 faltan S/.2300, pero si cada uno da S/.800 sobran S/.2200. ¿Cuántos alumnos forman la promoción?

UNI-2004 II

A) 90 B) 50 C) 60
D) 95 E) 45

25. El perímetro de un rectángulo mide 44 m. Si la base de este rectángulo tuviese 3 m más y su altura 4 m menos, el área del nuevo rectángulo tendría 30 m^2 menos que el del primero. Halla uno de los lados.

A) 12 m B) 14 m C) 18 m
D) 13 m E) 16 m

26. Jorge le dice a su amigo: “Dame cinco de tus caramelos y tendremos tantos el uno como el otro”. Este le responde: “Dame 10 de los tuyos y tendré el triple de los que te quedan”. ¿Cuántos caramelos tenía Jorge?

A) 20 B) 30 C) 25
D) 35 E) 40

27. Como todos sus hijos habían tenido muy buenas notas en sus exámenes finales, un padre de familia los quiere premiar económicamente. Si a cada uno le daban \$60, le sobraban \$20; pero para darle \$70 a cada uno, le faltarían \$30. ¿De qué suma disponía el padre?



A) \$400 B) \$360 C) \$340
D) \$320 E) \$300

28. Dos cantidades son tales que el cociente de la suma entre la diferencia es igual a 11/2 de la diferencia, mientras que el cociente del mayor entre el menor es 6/5. Calcula la diferencia del mayor menos el menor.

A) 1 B) 3 C) 2 D) 6 E) 5

29. Las edades de un padre y su hijo son tales que su cociente es 5. Si dentro de 14 años el cociente será 7/3, calcula la edad del padre dentro de 6 años.

A) 45 B) 42 C) 43
D) 44 E) 41

30. Javier es 12 años mayor que su hermano Miguel. Dentro de ocho años la relación de sus edades será de 2 a 1. ¿Cuál será la edad de Miguel dentro de 14 años?

A) 12 B) 16 C) 20
D) 14 E) 18

Claves

NIVEL 1
1. A
2. A
3. B
4. B
5. D
6. D
7. C
8. A
9. B
10. A

NIVEL 2
11. A
12. B
13. C
14. D
15. B
16. E
17. B
18. A
19. B
20. B

NIVEL 3
21. C
22. D
23. A
24. A
25. A
26. C
27. D
28. C
29. E
30. E

Edades

ELEMENTOS

Sujetos

Son los personajes del problema a quienes corresponden las edades y que intervienen en el problema.

Tiempo

Es uno de los elementos más importantes, ya que las condiciones del problema ocurren en tiempos diferentes (pasado, presente y futuro).

	Pasado	Presente	Futuro
Yo	Tenía	Tengo	Tendré
Tú	Tenías	Tienes	Tendrás
Él	Tuvo	Tiene	Tendrá

Edad

Representa el tiempo de vida de un sujeto.
Se presentan dos tipos de problemas:

a) Cuando interviene la edad de un solo sujeto.

Ejemplo:

Hace 8 años	Edad actual	Dentro de 12 años
x – 8	x	x + 12

b) Cuando intervienen las edades de dos o más sujetos.

Ejemplo:

	Hace 5 años	Edades actuales	Dentro de 6 años
A	25	30	36
B	22	27	33

Nota:

- La diferencia de edades entre 2 personas en cualquiera de los tiempos siempre es un valor constante.

  $25 - 22 = 3$ años (en el pasado)

  $30 - 27 = 3$ años (en el presente)

  $36 - 33 = 3$ años (en el futuro)

- La suma en aspa de valores ubicados simétricamente es un valor constante.

  $25 + 27 = 22 + 30$

  $30 + 33 = 27 + 36$

  $25 + 33 = 22 + 36$

Observación

Cuando hacemos referencia al tiempo pasado, será el tiempo que se debe restar.

Ejemplo:
Sea "x" mi edad actual, hace 8 años tenía: x – 8



Observación

Cuando hacemos referencia al tiempo futuro, será el tiempo que se debe sumar.

Ejemplo:
Sea "x" mi edad actual, dentro de 10 años tendré: x + 10



Atención

Cuando en un problema intervienen dos o más sujetos se sugiere el uso de cuadros de doble entrada con la finalidad de ordenar y relacionar los datos convenientemente.

Problemas resueltos

1 La edad de Mario y Luis suman 42 años, pero hace 6 años la edad de Mario era el doble de la edad de Luis. ¿Qué edad tiene Mario?

Resolución:

Hacemos un cuadro:

	Hace 6 años	Edad actual
Mario	x – 6	x
Luis	36 – x	42 – x

Según el enunciado:

$x - 6 = 2(36 - x) \Rightarrow x - 6 = 72 - 2x$

$3x = 78 \Rightarrow x = 26$

∴ Mario tiene 26 años.

2 Las edades de Pedro y Pablo suman 46 años. Pedro le dice a Pablo: "Cuando tú tenías la edad que yo tengo, mi edad era tan solo 8 años menos de la edad que hoy tienes". ¿Qué edad tiene Pablo?

Resolución:

Realizando un cuadro:

	Pasado	Presente
Pedro	38 – x	x
Pablo	x	46 – x

Suma 46

Aplicando suma en aspa: $x + x = 38 - x + 46 - x$

$4x = 84 \Rightarrow x = 21$

Luego, Pablo tiene 25 años.

3 La edad de un hijo es los 4/9 de la edad de su padre. Si dentro de 5 años la mitad de la edad del padre será igual a la edad del hijo. ¿Cúal es la edad del padre?

Resolución:

Según los datos:

	Edad actual	Dentro de 5 años
Hijo	$\frac{4}{9}x$	$\frac{4}{9}x + 5$
Padre	x	x + 5

Por enunciado del problema:

$\frac{x+5}{2} = \frac{4}{9}x + 5 \Rightarrow \frac{x+5}{2} = \frac{4x+45}{9}$

$9x + 45 = 8x + 90 \Rightarrow x = 45$

∴ La edad del padre es 45 años.

4 Las edades actuales de Lucho y Hernán suman 48 años. Lucho le dice a Hernán. "Yo tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía 5 años menos de lo que hoy tienes. ¿Qué edad tiene Hernán?

Resolución:

Según los datos:

	Pasado	Presente
Lucho	43 – 2x	2x
Hernán	x	48 – 2x

Suman 48

Aplicando suma en aspa:

$x + 2x = 48 - 2x + 43 - 2x$

$7x = 91 \Rightarrow x = 13$

∴ La edad de Hernán es: $48 - 2(13) = 22$ años

5 Dentro de 10 años la edad de un padre será el doble de la edad de su hijo. ¿Cuál es la edad actual del hijo, si hace 2 años la edad del padre era el triple de la edad de su hijo?

Resolución:

Según los datos:

	Hace 2 años	Edad actual	Dentro de 10 años
Padre	2x – 12	2x – 10	x
Hijo	x – 12	x – 10	x

Por condición del problema:

$2x - 12 = 3(x - 12)$

$2x - 12 = 3x - 36$

$x = 24$

∴ La edad del hijo es 14 años.

6 Hace 2 años tenía la cuarta parte de la edad que tendré dentro de 22 años. ¿Dentro de cuántos años tendré el doble de la edad que tenía hace 4 años?

Resolución:

Según los datos:

	Hace 4 años	Hace 2 años		Dentro de "a" años	Dentro de 22 años
Yo	x – 4	x – 2	x	x + a	x + 22

Según enunciado: $x - 2 = \frac{x + 22}{4}$

$4x - 8 = x + 2$

$3x = 30 \Rightarrow x = 10$

También: $x + a = 2(x - 4)$

$x + a = 2x - 8$

$a = x - 8$

$x = 10 \Rightarrow a = 2$

∴ Dentro de 2 años.

7 Hace 14 años, la relación de mi edad y tu edad era de 5 a 1. Dentro de 6 años dicha relación será de 5 a 3. ¿Qué edad tengo?

Resolución:

Según los datos:

	Hace 14 años	Edad actual	Dentro de 6 años
Mi edad	5k	5k + 14	5k + 20
Tu edad	k	k + 14	k + 20

Según el enunciado: $\frac{5k + 20}{k + 20} = \frac{5}{3}$

$15k + 60 = 5k + 100$

$10k = 40 \Rightarrow k = 4$

Luego, mi edad actual es.

$5k + 14 = 5(4) + 14 = 34$

∴ Yo tengo 34 años.

8 Dentro de 12 años la edad de Luis será la edad que hoy tiene Kiara. Dentro de 16 años la edad de Luis será 4/5 de la edad de Kiara en ese entonces. ¿Cuál es la edad de Luis?

Resolución:

Según los datos:

	Edad actual	Dentro de 12 años	Dentro de 16 años
Luis	x	x + 12	x + 16
Kiara	x + 12		x + 28

Del enunciado: $x + 16 = \frac{4}{5}(x + 28)$

$5x + 80 = 4x + 112$

$x = 32$

∴ La edad de Luis es 32 años.

9 Actualmente Carlos tiene 24 años y Walter tiene 36 años. Carlos afirma que se casará cuando transcurran tantos años como los transcurridos hasta el año que terminó la secundaria. La suma de las edades de Walter y Carlos en el año en el que se case este último y la suma de las edades que tenían cuando Carlos terminó su secundaria, son entre sí como 19 es a 11. ¿A qué edad piensa casarse Carlos?

Resolución:

Según los datos:

	Hace "x" años	Edad actual	Dentro de "x" años
Carlos	24 – x	24	24 + x
Walter	36 – x	36	36 + x
	60 – 2x		60 + 2x

Por dato del problema: $\frac{60 + 2x}{60 - 2x} = \frac{19}{11}$

$60 . 11 + 22x = 60 \times 19 - 38x$

$60x = 60 . 8 \Rightarrow x = 8$

∴ Carlos se casará cuando tenga:

$24 + 8 = 32$ años

10 Hace "n" años tenía la mitad de lo que tendré dentro de "n" años, además dentro de "x" años tendré "y" años. Halla "y".

Resolución:

Según los datos:

	Hace "n" años	Edad actual	Dentro de "n" años	Dentro de "x" años
Yo	a – n	a	a + n	a + x = y

Por condición del problema:

$a - n = \frac{a + m}{2}$

$2a - 2n = a + m$

$a = 2n + m$

También: $a + x = y$ ...(1)

Reemplazamos a en (1):

$2n + m + x = y$

∴ $y = 2n + m + x$

Actividades de razonamiento

1. José tiene 24 años y su edad es el triple de la edad que tenía Laura cuando José tenía la tercera parte de la edad que tiene Laura. ¿Qué edad tiene Laura?

A) 25 años B) 20 años C) 15 años
D) 30 años E) 24 años

2. Dentro de 6 años la edad de Jéssica será el triple de la edad de Violeta. ¿Cuál es la edad actual de Jéssica, si hace 2 años, la edad de ella era el cuádruple de la edad de Violeta?

A) 66 años B) 33 años C) 50 años
D) 25 años E) 18 años

3. Un niño dice: "Si a la edad que tenía hace 8 años la multiplico por la edad que tendré dentro de 8 años resulta 105. Halla la edad del niño.

A) 10 años B) 9 años C) 13 años
D) 8 años E) 12 años

4. Si al cuádruple de la edad que tendré dentro de 8 años le restamos el doble de la edad que tenía hace 5 años, resultaría 19 años, más el triple de mi edad. ¿Qué edad tengo?

A) 17 años B) 31 años C) 13 años
D) 23 años E) 18 años

5. Si multiplicamos por 3 los años que tendré dentro de 3 años y restamos el triple de lo que tenía hace 3 años se obtendrá los años que tengo ahora. ¿Qué edad tendré dentro de 10 años?

A) 28 años B) 24 años C) 32 años
D) 18 años E) 15 años

6. Si yo tuviera 5 años más, mi edad y tu edad estarían en la relación de 3 a 4. En cambio si tú tuvieras 8 años más, la relación sería de 1 a 2. Entonces yo tengo.

A) 28 años B) 36 años C) 40 años
D) 25 años E) 22 años

7. Si al año en que cumplí 12 años le sumas el año en que cumplí 20 años y a dicha suma le restas la suma del año que nací con el año actual, obtendrás 6. ¿Qué edad tengo?

A) 32 años B) 26 años C) 18 años
D) 18 años E) 20 años

8. Las edades de 3 hermanos suman 30 años. Si hace 4 años, dichas edades eran 3 números pares consecutivos, ¿cuál será la edad del mayor dentro de 30 años?

A) 39 años B) 35 años c) 42 años
D) 37 años E) 12 años

9. Hace 5 años nuestras edades estaban en la relación de 5 a 3, y dentro de 25 años, tu edad será a la mía como 5 es a 7. ¿Cuántos años tengo?

A) 50 años B) 40 años C) 20 años
D) 80 años E) 60 años

10. Juan es a años mayor que Luis y dentro de b años su edad será c veces la edad actual de Luis. ¿Qué edad tiene Luis?

A) (a + b)/(c – 1) B) (a + b)/ (c + 1)
C) (a – b)/(c – 1) D) (a – b)/(c + 1)
E) a + b

11. Juana tiene una hija a los 20 años y una nieta 24 años después. Cuando la nieta tiene 11 años la abuela dice tener 45 años y la hija 30 años. ¿Cuál es la suma de las edades que ocultan ambas?

A) 25 años B) 18 años C) 10 años
D) 20 años E) 15 años

12. Pedro le dice a Juan: "Yo tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes, pero cuando tú tengas la edad que yo tengo, la suma de nuestras edades será 63 años". Determina la edad de Pedro y Juan.

A) 28 y 21 B) 23 y 25 C) 31 y 30
D) 27 y 20 E) 30 y 32

13. Un padre tiene x años y su hijo y años. ¿Dentro de cuántos años tendrá el padre el cuádruple de la edad de su hijo?

A) (4y – 3)/3 B) (x – 3y)/2 C) (3y – x)/2
D) (4x – y)/3 E) (x – 4y)/3

14. Las edades de tres personas hace 2 años eran como 3; 4 y 5 y dentro de 2 años serán como 5; 6 y 7. Halla la edad del mayor.

A) 10 años B) 9 años C) 12 años
D) 11 años E) 14 años

Claves

1. E
2. A
3. C
4. D
5. A
6. E
7. B
8. C
9. D
10. A
11. E
12. A
13. E
14. C

Reto



"A" tiene $\overline{ab}$ años y "B" $\frac{\overline{ab}}{3}$ años. Le preguntaron a Lucho por su edad y este indica que "A" le lleva tantos años como los años que le lleva él a "B". Actualmente la suma de las edades de los tres es 36 años. Calcula (a + b).

Rpta.: 9

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Si 3 veces la edad de mi hermano es 2 veces mi edad, y hace 3 años 3 veces su edad era la mía, ¿cuántos años tengo?

   A) 6 B) 9 C) 3 D) 12 E) 15

2. Dentro de 60 años Martín tendrá el cuádruple de su edad actual. Hace 5 años tenía:

   A) 25 B) 20 C) 85 D) 75 E) 15

3. Se le pregunta a Augusto por su edad y él responde: "Multipliquen por 3 los años que tendré dentro de 3 años y réstenle el triple de los que tenía hace 3 años y obtendrán precisamente los años que tengo". ¿Qué edad tiene ahora?

   A) 11 B) 18 C) 20 D) 22 E) 25

4. Si al doble de mi edad se le quitan 13 años, se obtendrá lo que me falta para tener 50 años. ¿Cuánto me falta para cumplir el doble de lo que tenía hace 5 años?

   A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

5. Un padre tiene 30 años y su hija 3. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el cuádruple de la edad de la hija?

   A) 15 B) 3 C) 5 D) 6 E) 10

6. Al preguntarle su edad a Vanessa, ella respondió: "Si al año en que cumplí los 15 años le suman el año en que cumplí los 26, y le restan la suma del año en que nací y el actual, obtienen 12". La suma de las cifras de la edad de Vannesa es:

   A) 9 B) 10 C) 11
   D) 6 E) 12

7. Dentro de 8 años la suma de nuestras edades será 42 años; pero hace **a** años la diferencia de nuestras edades era de 8 años. ¿Hace cuántos años la edad de uno era el triple de la del otro?

   A) 2 B) 3 C) 4
   D) 5 E) 6

8. Si juntamos las edades de Juan y Pedro dentro de 8 años obtendríamos 64. Al acercarse María, Juan le dice: "Cuando tú naciste, yo tenía 4 años, pero cuando Pedro nació tú tenías 2 años. ¿Cuál es la edad de María?

   A) 22 B) 23 C) 27
   D) 21 E) 24

9. Paulina tuvo su primer hijo a los 21 años, a los 27 años su tercer hijo; a fines de 1995 la suma de edades de dichos hijos es 32 años. ¿En qué año nació Paulina?

   A) 1945 B) 1955 C) 1962
   D) 1964 E) 1948

10. En 1918, la edad de un padre era 9 veces la edad de su hijo; en 1923, la edad del padre fue el quíntuple de la de su hijo. ¿Cuál fue la edad del padre en 1940?

A) 66 B) 72 C) 67 D) 70 E) 57

NIVEL 2

11. Dentro de 6 años la edad de Jessica será el triple de la edad de Violeta. ¿Cuál es la edad actual de Jessica, si hace 2 años la edad de ella era el cuádruple de la de Violeta?

A) 54 B) 66 C) 72 D) 60 E) 56

12. Norma le dice a Marisol: “Tengo el triple de la edad que tú tenías, cuando yo tenía la mitad de la edad que tienes y cuando tengas la edad que tengo, yo tendré el doble de la edad que tú tenías hace 12 años. ¿Cuánto suman sus edades actuales?



A) 64 B) 68 C) 66
D) 63 E) 73

13. Un padre le dice a su hijo: “Yo tengo el doble de la edad que tú tenías, cuando yo tenía la edad que tú tienes, y cuando tú tengas mi edad, la suma de nuestras edades será 162. ¿Qué edad tiene actualmente cada uno? (En años).

A) 72 y 54 B) 64 y 48 C) 70 y 56
D) 72 y 58 E) 70 y 54

14. Hace 5 años la edad de un padre fue 4 veces la del hijo y dentro de 5 años será solamente el doble de la de su hijo. ¿Qué edad tendrá el padre, cuando el hijo tenga los años que tuvo el padre cuando nació el hijo?

A) 30 B) 35 C) 36 D) 40 E) 45

15. Cuando yo tenía un año menos de la edad que tú tienes, tú tenías 5 años menos de la edad que yo tengo. Pero cuando tengas la edad que yo tengo, nuestras edades sumarán 110 años. ¿Qué edad tengo?

A) 54 B) 52 C) 50 D) 48 E) 46

16. Charo es hija de Ángela y Luciana es hija de Charo. Cuando Luciana nació, la edad de Ángela era exactamente el doble de la edad de Charo; hoy durante la reunión del décimo cumpleaños de Luciana, Ángela dice tener 45 años y Charo dice tener 27 años. Si la suma de las edades de Ángela, Charo y Luciana es de 90 años, ¿cuántos años oculta cada una de las señoras?

A) Ángela = 5 y Charo = 5
B) Ángela = 4 y Charo = 4
C) Ángela = 5 y Charo = 3
D) Ángela = 3 y Charo = 4
E) Ángela = 4 y Charo = 3

17. Las edades de dos personas están en la relación de 5 a 7. Dentro de 10 años la relación será de 3 a 4. ¿Hace 10 años cuál era la relación de dichas edades?

A) 3 a 5 B) 2 a 3 C) 1 a 2
D) 2 a 5 E) 4 a 3

18. Hace 12 años la edad de 2 hermanos estaban en relación de 4 a 3, actualmente sus edades suman 59 años. ¿Dentro de cuántos años sus edades estarán en relación de 8 a 7?

A) 9 B) 8 C) 7
D) 20 E) 21

19. Preguntando a una persona por su edad responde: "Si al doble de mi edad le quitan 17 años, se obtendría su complemento aritmético". Calcula la edad.

A) 9 B) 39 C) 17
D) 17 ó 39 E) 9 ó 39

20. En el año 1988 un profesor sumó los años de nacimiento de 45 estudiantes de un aula y luego las edades de los estudiantes, enseguida sumó ambos resultados y obtuvo 89437. ¿Cuántos estudiantes ya cumplieron años en dicho año?



A) 22 B) 23 C) 24
D) 25 E) 21

NIVEL 3

21. En 1987 Emilio tuvo tantos años como el doble de las 2 últimas cifras del año de su nacimiento. ¿Cuál es la suma de las cifras del año de su nacimiento?

A) 11 B) 10 C) 21
D) 22 E) 18

22. Es sabido que los gatos tienen 7 vidas pero Minina gata techera pensó cierta noche: "Hoy termina mi segunda vida y en todos mis años he hecho lo que otros hacen en sus 7 vidas". Si el número de años que ella lleva vividos es igual a la cuarta parte del número de meses vividos, menos 6, ¿cuántos años dura una de las vidas de un gato?



A) 3 B) 6 C) 1,5
D) 4,5 E) 2

23. Luis cuenta que cuando cumplió años en 1994, descubrió que su edad era igual a la suma de las cifras del año de su nacimiento. ¿Cuántos años tenía en 1979?

A) 12 B) 13 C) 14
D) 10 E) 11

24. Julio nació 6 años antes que Victor, en 1948 la suma de sus edades era la cuarta parte de la suma de sus edades en 1963. ¿En qué año nació Julio?

A) 1935 B) 1938 C) 1940
D) 1942 E) 1932

25. En 1980 Bryan se percató que su edad coincidía con las 2 últimas cifras del año de su nacimiento; al comentárselo a su abuelito, este sorprendido le contestó que con él ocurría lo mismo. Calcula la diferencia de sus edades hace x años (18 < x < 40).

A) 40 B) 20 C) 50
D) 90 – x E) 40 – x

26. En 1977 la edad de Pedro era $\overline{ab}$ y la de su abuelo $\overline{ba}$. La diferencia de dichas edades es 45. Calcula la edad de Pedro si se sabe que en 1977 su edad coincidía con las dos últimas cifras de su año de nacimiento, pero en orden invertido.

A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 20

27. ¿Cuántos años tendrá una persona dentro de 9 años; sabiendo que la diferencia entre la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 30 años con la edad que tuvo hace 2 años, es 2?

A) 49 B) 51 C) 56
D) 60 E) 81

28. Las edades de dos personas son 36 y 24 años, por lo tanto están en la relación de 3 a 2. ¿En qué tiempo esta relación será de 5 a 4?

Villarreal-2008 I

A) 24 B) 12 C) 18
D) 48 E) 36

29. Juan y Pedro tienen respectivamente J y P años de edad (J > P). ¿Hace cuántos años la edad de Juan fue el triple de la edad de Pedro?

A) $\frac{J-3P}{3}$ B) $\frac{3P-J}{4}$ C) 3P – J
D) $\frac{3P-J}{2}$ E) J – P

30. Un padre tiene **n** años y su hijo **m** años. ¿Dentro de cuántos años el padre tendrá el doble de la edad de su hijo?



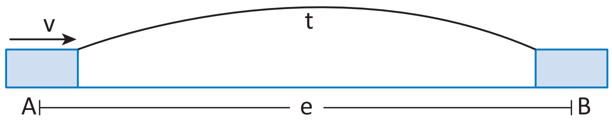
A) (n – m) B) (m – n)
C) (n + 2m) D) (n – 2m)
E) $(n^2 - 1)$

Claves

NIVEL 1	9. B	17. B	25. C
1. A	10. C	18. B	26. C
2. E	NIVEL 2	19. E	27. D
3. B	11. B	20. A	28. A
4. B	12. B	NIVEL 3	29. D
5. D	13. A	21. C	30. D
6. C	14. A	22. C	
7. D	15. A	23. D	
8. B	16. C	24. C	

Móviles

Dado un cuerpo que se mueve desde un punto "A" hasta "B" como se observa en la figura:

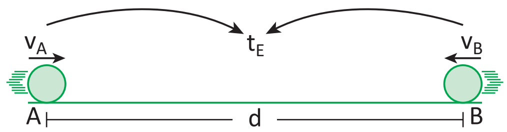


Se cumple: $e = v \times t$

$v = \dfrac{e}{t}$ $\quad t = \dfrac{e}{v}$

TIEMPO DE ENCUENTRO (t_E)

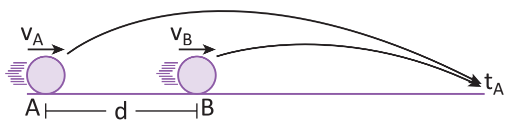
Es el tiempo que demoran dos móviles en encontrarse, viajando en sentidos contrarios.



$$t_E = \frac{d}{v_A + v_B}$$

TIEMPO DE ALCANCE (t_A)

Es el tiempo que demora un móvil en alcanzar a otro que se mueve en el mismo sentido.



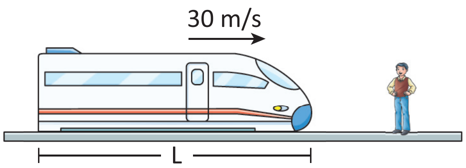
$$t_A = \frac{d}{v_A - v_B}$$

CRITERIO DE TRENES

Cuando un tren pasa delante de un observador

Ejemplo:
Un tren viaja a 30 m/s, demora 5 s en pasar delante de un observador. ¿Cuál es la longitud del tren?

Resolución:

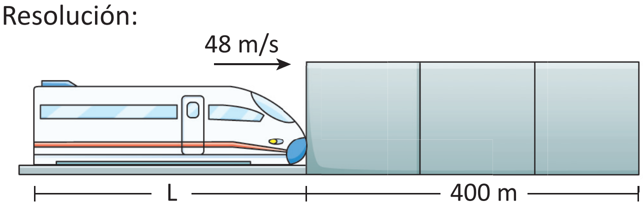


Aplicando: $e = v \times t$
Reemplazando: $L = 30 \text{ m/s} \times 5 \text{ s}$
$L = 150 \text{ m}$

Cuando un tren pasa por un túnel

Ejemplo:
Un tren viaja a 48 m/s y demora 10 s en pasar un túnel de 400 m de longitud. ¿Cuál es la longitud del tren?

Resolución:



Aplicando: $e = v \times t$
Reemplazando:
$L + 400 = 48 \times 10$
$L + 400 = 480$
$L = 80 \text{ m}$

Nota

Es importante verificar que todas las magnitudes tengan unidades compatibles:

e	t	v
m	s	m/s
km	h	km/h

Recuerda

En las relaciones:

$$t_E = \frac{d}{v_A + v_B}$$

$$t_A = \frac{d}{v_A - v_B}$$

t_E: tiempo de encuentro.
t_A: tiempo de alcance.
d: distancia de separación.
v_A, v_B: velocidades de los móviles.



Atención

Cuando un tren pasa delante de un observador se debe considerar a este como un punto, es decir el espacio que recorre el tren es la propia longitud del tren.
Entonces: $e = L_{tren}$
Luego:

$$L_{tren} = v_{tren} \times t$$

Atención

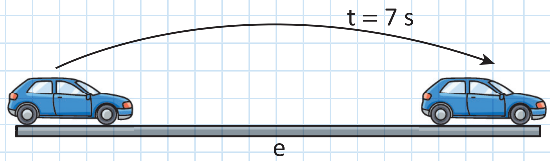
Cuando un tren pasa por un túnel se debe considerar la longitud del túnel, es decir, el espacio que recorre el tren, es la longitud del tren más la longitud del túnel.
Entonces: $e = L_{tren} + L_{túnel}$
Luego:

$$L_{tren} + L_{túnel} = v_{tren} \times t$$

Problemas resueltos

1 Un auto viaja a razón de 108 km/h. ¿Cuántos metros recorrerá en 7 s?

Resolución:



La velocidad se expresa en m/s.

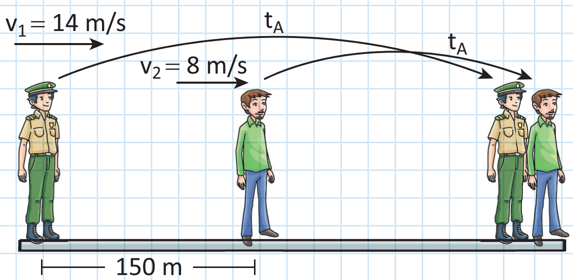
$$v = 108\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}} \times \frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} = 30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$v = 30$ m/s

Luego: $e = v \times t \Rightarrow e = 30\text{ m/s} \times 7\text{ s} \Rightarrow e = 210\text{ m}$

2 Un policía persigue a un ladrón que se encuentra a 150 m de distancia. Si empezaron a correr simultáneamente a razón de 14 m/s y 8 m/s, respectivamente, determina el tiempo, en segundos, que el policía demora en atrapar al ladrón.

Resolución:



Podemos aplicar la fórmula de tiempo de alcance:

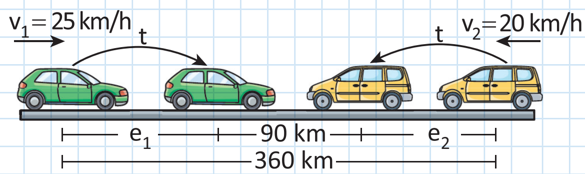
$$t_A = \frac{d}{v_1 - v_2}$$

Reemplazamos:

$$t_A = \frac{150\text{ m}}{14\text{ m/s} - 8\text{ m/s}} = \frac{150\text{ m}}{6\text{ m/s}} = 25\text{ s}$$

3 Dos autos que están separados por 360 km avanzan en línea recta en sentidos opuestos acercándose cada vez más a razón de 25 km/h y 20 km/h. Determina luego de qué tiempo estarán separados 90 km por primera vez.

Resolución:

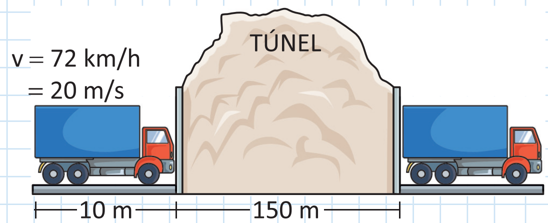


Del gráfico: $e_1 + 90 + e_2 = 360$

$25t + 90 + 20t = 360 \Rightarrow 45t = 270 \Rightarrow t = 6\text{ s}$

4 Un camión de 10 m de largo viaja en línea recta a razón de 72 km/h. Determina el tiempo, en segundos para pasar completamente por un túnel de 150 m de longitud.

Resolución:

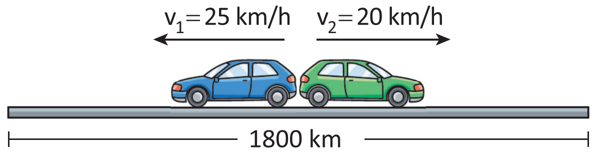


$v = 20$ m/s

$e = 160$ m

$t = ?$ $\qquad t = e/v \Rightarrow t = \dfrac{160\text{ m}}{20\text{ m/s}} = 8\text{ s}$

5 Dos autos parten del mismo lugar simultáneamente, pero en sentidos opuestos. El primero va a razón de 20 km/h y el segundo a 25 km/h. Determina el tiempo, en horas para estar separados 1800 km



Resolución:

En este problema podemos aplicar la fórmula de tiempo de encuentro.

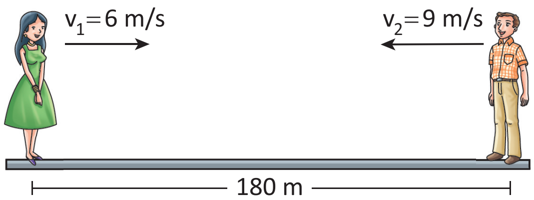
$$t_E = \frac{d}{v_1 + v_2}$$

Reemplazando:

$$t_E = \frac{1800\text{ km}}{25\text{ km/h} + 20\text{ km/h}}$$

$$t_E = \frac{1800\text{ km}}{45\text{ km/h}} = 40\text{ h}$$

6 Maricarmen y Paolo están separados por 180 m. Si corren simultáneamente uno al encuentro del otro, con una rapidez de 6 m/s y 9 m/s respectivamente. Determina el espacio recorrido por Maricarmen hasta encontrarse con Paolo.



Resolución:

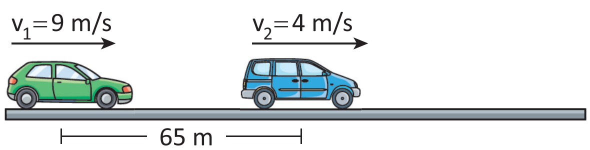
Aplicamos: $t_E = \dfrac{d}{v_1 + v_2}$

Reemplazando: $t_E = \dfrac{180\text{ m}}{6\text{ m/s} + 9\text{ m/s}}$

$t_E = \dfrac{180\text{ m}}{15\text{ m/s}} = 12\text{ s}$

Luego: $e_{Maricarmen} = v_1 \times t = 6\text{ m/s} \times 12\text{ s} = 72\text{ m}$

7 Los móviles mostrados en la figura parten simultáneamente. Determina la distancia que recorre el más veloz hasta alcanzar al otro móvil.



Resolución:

Aplicamos: $t_A = \dfrac{d}{v_1 - v_2}$

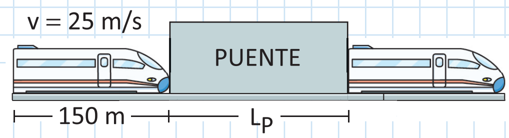
Reemplazando:

$t_A = \dfrac{65\text{ m}}{9\text{ m/s} - 4\text{ m/s}} \Rightarrow t_A = \dfrac{65\text{ m}}{5\text{ m/s}} = 13\text{ s}$

Luego: $e_{veloz} = v \times t = 9\text{ m/s} \times 13\text{ s} = 117\text{ m}$

8 Un pasajero que viaja en un tren de 150 m de longitud a razón de 25 m/s, desea calcular la longitud de un puente; utilizando un cronómetro registra que el tren cruza el puente en 20 s. ¿Cuál es la longitud del puente?

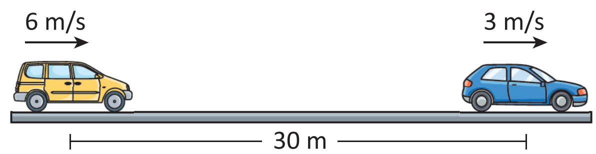
Resolución:



$e = v \times t$

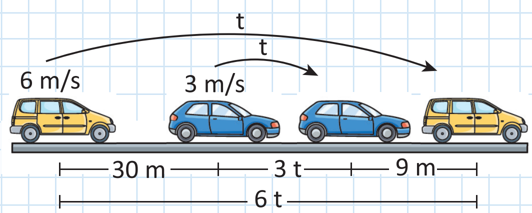
$150 + L_P = 25 \times 20 \Rightarrow 150 + L_P = 500 \Rightarrow L_P = 350\text{ m}$

9 En la figura mostrada los autos parten simultáneamente. Determina el tiempo en segundos, para que se encuentren separados 9 m por segunda vez.



Resolución:

Para que se encuentren separados 9 m por segunda vez, el segundo debe pasar al primero.



Del gráfico: $30 + 3t + 9 = 6t \Rightarrow 39 = 3t \Rightarrow t = 13\text{ s}$

10 Un avión hace el recorrido de la ciudad A hacia B en 2 h 40 min, al regresar de B hacia A aumenta su rapidez en 20 km/h y tarda 2 h. Determina la distancia entre A y B.

Resolución:

Según los datos:

$v_{ida} = x$ $\qquad t_{ida} = 2\text{ h }40\text{ min} = 8/3\text{ h}$

$v_{regreso} = x + 20\text{ km/h}$ $\qquad t_{regreso} = 2\text{ h}$

Como el recorrido es el mismo, entonces:

$e = v \,.\, t$

$e = x \,.\, \dfrac{8}{3} = (x + 20\text{ km/h}) \,.\, 2\text{ h}$

$\Rightarrow \dfrac{4}{3}x = x + 20 \Rightarrow x = 60\text{ km/h}$

Luego: $e = (60 + 20) \,.\, 2 \Rightarrow e = 80 \,.\, 2 = 160\text{ km}$

Actividades de razonamiento

1. Usaín recorre 100 m en 10 segundos. Calcula su rapidez en km/h.

A) 36 km/h B) 18 km/h C) 27 km/h
D) 12 km/h E) 9 km/h

2. La rapidez de un avión es 720 km/h; el tiempo que demora en recorrer 800 m es de:

A) 10 s B) 3 s C) 8 s
D) 4 s E) 7 s

3. Dos móviles se dirigen uno al encuentro del otro. Si inicialmente están separados 750 km y sus velocidades son de 60 km/h y 90 km/h. ¿En cuántas horas se cruzan?

A) 4 h B) 7 h C) 5 h
D) 3 h E) 6 h

4. Lucía y Eddy se acercan a razón de 28 y 33 metros por minuto. Si luego de 8 minutos logran encontrarse, ¿cuántos metros estaban separados inicialmente?

A) 320 m B) 388 m C) 420 m
D) 500 m E) 488 m

5. Un automóvil viaja durante 8 horas a la misma velocidad. En la hora siguiente, el auto viaja en velocidad reducida a la mitad y durante la décima hora con una velocidad doble de la inicial. Si cubrió en total una distancia de 420 km, ¿con qué velocidad viajó en la última hora?

A) 60 km/h B) 100 km/h C) 70 km/h
D) 80 km/h E) 90 km/h

6. Un peatón recorre 23 km en 7 horas, los primeros 8 km con una velocidad superior en 1 km/h a la velocidad del resto del recorrido. Calcula la velocidad con que recorrió el primer trayecto.

A) 5 km/h B) 4 km/h C) 2 km/h
D) 6 km/h E) 3 km/h

7. Un viajero recorre 820 km en 7 horas, en autobús y en avión. En avión va a 200 km/h y en autobús a 55 km/h. ¿Cuál es la distancia que se recorrió en avión?

A) 500 km B) 400 km C) 200 km
D) 700 km E) 600 km

8. Un atleta va a recorrer 200 m con rapidez constante. Si al cabo de 25 segundos recorrió los 3/5 de lo que no recorrió, ¿cuál es su rapidez?

A) 12 m/s B) 3 m/s C) 6 m/s
D) 15 m/s E) 9 m/s

9. Un hombre camina 35 km, una parte a 4 km/h y la otra parte a 5 km/h. Si hubiese caminado a 5 km/h cuando andaba a 4 km/h y viceversa, hubiese andado 2 km más en el mismo tiempo. ¿Cuánto tiempo estuvo andando?

A) 8 h B) 4 h C) 2 h
D) 7 h E) 3 h

10. Dos automóviles recorren un mismo camino rectilíneo con velocidades de 50 km/h y 40 km/h con una diferencia de tiempos de 30 minutos. Halla la longitud del camino.

A) 70 km B) 200 km C) 100 km
D) 50 km E) 150 km

11. Las velocidades de dos autos son como 6 es a 5. El primero recorre 720 km en 6 horas. ¿Cuánto recorre el segundo en 7 horas?

A) 800 km B) 600 km C) 500 km
D) 700 km E) 400 km

12. Para recorrer un río de 280 km de longitud un bote demora 7 horas en el sentido de la corriente; pero cuando va en contra de la corriente demora 28 horas. ¿Cuál es la velocidad del bote?

A) 40 km/h B) 15 km/h C) 30 km/h
D) 20 km/h E) 25 km/h

13. ¿Cuánto tiempo tardará un tren de 300 m de largo, que marcha a la velocidad de 25 m/s, en pasar un túnel de 1800 m de largo?

A) 82 s B) 84 s C) 85 s
D) 41 s E) 42 s

14. Roberto salió en su carro con una velocidad de 40 km/h. Dos horas después, Marita salió del mismo lugar; ella manejó por la misma carretera a 50 km/h. ¿Cuántas horas ha manejado Marita cuando alcanzó a Roberto?

A) 7 h B) 6 h C) 4 h
D) 8 h E) 5 h

Claves

1. A	5. D	9. A	13. B
2. D	6. B	10. C	14. D
3. C	7. E	11. D	
4. E	8. B	12. E	

Reto



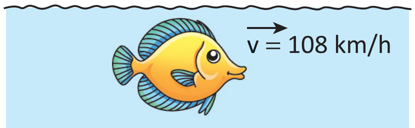
Se había determinado que la rapidez constante de un móvil en trayectoria rectilínea era de 1 m/s, pero después se comprobó que a la medida de longitud usada le faltaba un decímetro de metro y que el cronómetro utilizado se adelantaba en 1/20 de segundo por cada segundo. Determina la verdadera rapidez del móvil en m/s.

Rpta.: $\frac{18}{19}$ **m/s**

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Un pez nada a una rapidez de 108 km/h. Determina el tiempo que utiliza en recorrer 120 m.



A) 5 s B) 7 s C) 4 s
D) 6 s E) 8 s

2. Usaín Bolt batió el record mundial de 200 m en el mundial de Berlín del 2009, utilizando un tiempo de 19,19 s. Determina su rapidez promedio en m/s.

A) 9,24 B) 10,35 C) 11,11
D) 10,42 m/s E) 9,87

3. Dos móviles distantes 200 km salen al encuentro desde dos puntos A y B con rapidez de 60 km/h y 40 km/h respectivamente. ¿En qué tiempo se encontrarán y a qué distancia de A?

A) 2 h y 80 km B) 2 h y 100 km
C) 2 h y 120 km D) 3 h y 120 km
E) 3 h y 80 km

4. Un camión de 20 m marcha con una rapidez de 60 km/h por una carretera paralela a la vía del tren. Si el tren de 80 m de longitud lleva una rapidez de 45 km/h en la misma dirección, ¿qué tiempo demora el camión en pasar al tren?

A) 24 s B) 25 s C) 32 s
D) 36 s E) 28 s

5. Dos trenes de igual longitud se desplazan con rapidez constante y tardan 6 segundos en cruzarse cuando viajan en sentidos contrarios. Si el de mayor rapidez tarda 8 segundos en pasar totalmente a otro cuando van en el mismo sentido, la relación entre la rapidez de los trenes es:

A) 1/7 B) 3/4 C) 6/7 D) 5/9 E) 3/7

6. Dos trenes marchan sobre vías paralelas pero en sentidos contrarios, con velocidades respectivas de 60 y 30 km/h. Un observador situado en el segundo tren ve pasar al primero en 15 s. Halla la longitud de dicho tren.

A) 350 m B) 375 m C) 380 m
D) 400 m E) 340 m

7. Un tren tarda 60 s en cruzar un túnel de 120 m de longitud y en pasar delante de un observador emplea 20 s. ¿Cuál es la longitud del tren?

A) 80 m B) 90 m C) 100 m D) 50 m E) 60 m

8. Un tren pasa por delante de un observador inmóvil y demora 7 segundos, al pasar por una estación de 360 m demora 22 segundos. Halla su rapidez.

A) 20 m/s B) 22 m/s C) 28 m/s
D) 24 m/s E) 30 m/s

9. Un tren tardó 6 segundos en pasar por un semáforo y 24 segundos en atravesar un túnel de 240 metros de longitud. ¿Cuánto tardará en cruzar una estación de 160 m de longitud?

A) 12 s B) 20 s C) 18 s D) 16 s E) 21 s

10. Si un vehículo viaja a una velocidad de 30 km/h. ¿Cuántas horas empleará para recorrer d km, si hace **n** paradas de **m** minutos cada una?

A) $\frac{3d - mn}{4}$ B) $\frac{2d + mn}{60}$ C) $\frac{3d - 4mn}{140}$
D) $\frac{3d + 4m}{140}$ E) $\frac{3d + 2mn}{120}$

NIVEL 2

11. Un ciclista corre por una pendiente hasta el final con una rapidez de 5 m/s y cuando regresa hacia el punto de partida lo hace a razón de 4 m/s demorándose en la ida y vuelta 15 min. Determina la longitud de la pendiente en metros.



A) 2000 m B) 1500 m C) 1200 m
D) 1300 m E) 1800 m

12. Las velocidades de 2 autos son como 6 es a 5. El primero recorre 720 km en 6 horas. ¿Cuánto recorre el segundo en 7 horas?

A) 740 km B) 680 km C) 700 km
D) 760 km E) 640 km

13. Un tren pasa delante de un poste en 10 s y cruza un puente en 15 s. ¿En cuánto tiempo el tren cruzaría el puente si este tuviera el triple de su longitud?

A) 20 s B) 30 s C) 25 s D) 35 s E) 24 s

14. Un motociclista observa que $\frac{1}{5}$ de lo que ha recorrido equivale los $\frac{3}{5}$ de lo que le falta recorrer. ¿Cuántas horas habrá empleado hasta el momento, si todo el viaje lo hace en 12 horas?

A) 10 h B) 8 h C) 9 h
D) 11 h E) 7 h

15. A y B están separados 150 m. Si ambos corren al encuentro, este se produce al cabo de 10 s. Pero si el más rápido corre en pos del más lento; este es alcanzado en 30 s. Calcula la mayor rapidez.

A) 9 m/s B) 10 m/s C) 12 m/s
D) 5 m/s E) 6 m/s

16. Un chofer tiene que hacer un recorrido del pueblo A hasta el pueblo B, si conduce a una rapidez de 100 km/h llegaría a las 3 p.m. y si conduce a 150 km/h llegaría a la 1 p.m. ¿Cuál sería la rapidez a la que debería ir, si debe llegar a las 2 p.m.?

A) 120 km/h B) 150 km/h C) 130 km/h
D) 135 km/h E) 140 km/h

17. Un ciclista sale de un pueblo A hacia otro B a las 8 a.m. con una rapidez de 27 km/h; otro ciclista sale una hora después del mismo pueblo A, con una rapidez de 30 km/h y llega al pueblo B a la misma hora que el primer ciclista. Calcula la distancia que hay entre los dos pueblos.

A) 400 km B) 270 km C) 700 km
D) 150 km E) 900 km

18. Dos automóviles, simultáneamente pasaron por un mismo punto con rapidez constante de 50 km/h y 40 km/h, y en una misma dirección; después de 1/2 hora pasa un tercer automóvil por el mismo punto y en la misma dirección, alcanzando al primero 1,5 h más tarde que al segundo. ¿Cuál es la rapidez del tercer automóvil?

A) 80 km/h B) 50 km/h C) 60 km/h
D) 55 km/h E) 70 km/h

19. Un ciclista pasa a las 9 a.m. por un pueblo P a rapidez constante dirigiéndose a Q, dos horas después por el mismo lugar pasó un auto con rapidez constante alcanzando al ciclista a las 12 del mediodía, y luego de llegar a Q y volver inmediatamente encontró al ciclista 3 h después del primer encuentro. ¿A qué hora llegó el ciclista a Q?

A) 6 p.m. B) 10 p.m. C) 5 p.m.
D) 8 p.m. E) 12 m.

20. ¿Cuántas horas emplea un tren que viaja a una rapidez de 40 km/h entre dos paradas para recorrer **a** kilómetros si hace **n** paradas de **m** minutos cada una?

A) $\frac{a}{40} + nm$ B) $\frac{a}{40} + \frac{nm}{30}$ C) $\frac{3a + 2nm}{120}$

D) $\frac{2a + 3nm}{120}$ E) $\frac{a + 3nm}{60}$

NIVEL 3

21. Un ómnibus tarda 8 segundos en pasar por delante de un observador y 38 segundos en cruzar una estación. Sabiendo que si aumentamos la rapidez del ómnibus en 6 km/h más, tardaría 6 segundos en cruzar por delante de otro observador. Calcula la longitud de la estación.

A) 120 m B) 130 m C) 140 m
D) 150 m E) 160 m

22. Dos nadadores se dirigen con rapidez constante de un extremo de una piscina hacia el otro extremo, llegan al punto opuesto y vuelven inmediatamente. El primer encuentro se produce a 3 m de un extremo y el segundo a 1/5 de la longitud de la piscina respecto del otro extremo. ¿Cuál es la longitud de la piscina?



A) 75 m B) 50 m C) 30 m
D) 60 m E) 90 m

23. Se tiene un circuito cerrado de 420 metros. Dos corredores pasan por un mismo punto, en el mismo sentido, y al cabo de media hora uno de ellos le saca dos vueltas de ventaja al otro. Pero si pasaran en sentidos contrarios, a los 6 minutos se cruzarían por segunda vez. ¿Cuál es la rapidez del más lento?

A) 50 m/min B) 55 m/min
C) 56 m/min D) 58 m/min
E) 60 m/min

24. Un móvil pasa por A a las 6 a.m. y llega a B a las 4 p.m.; otro móvil pasa por B a las 7 a.m. y llega a A a las 3 p.m. Si la distancia de A a B es $\overline{xyz}$ km, ¿a qué hora se encontraron por el camino?

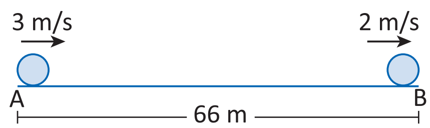
A) 11 a.m. B) 10 a.m. C) 12 m.
D) 9 a.m. E) 1 p.m.

25. Un maratonista parte de A en dirección a B en el mismo instante que dos personas parten de B en sentidos opuestos. El maratonista encuentra a uno en M y al otro lo alcanza en N. Halla la distancia AB sabiendo que las dos personas marchan a la misma rapidez constante y que la rapidez del maratonista es 4 veces la de las personas. Además MN = 16 km.



A) 30 km B) 32 km C) 40 km
D) 36 km E) 48 km

26. Con respecto a la figura mostrada el móvil B parte 2 s después de A. Indica con una (V) si es verdadera y con una (F) si es falsa cada proposición.



I. Se encuentran después de 62 s que salió el móvil A. ( )
II. El móvil B recorre 120 m hasta ser alcanzado por el móvil A. ( )
III. El móvil B utiliza 60 s para encontrarse con el móvil A. ( )

A) FFF B) FFV C) VFF D) VVV E) VVF

27. Un caminante descansa 10 minutos después de cada 5 km de recorrido. Al llegar al kilómetro 30, ¿cuántos minutos ha descansado?

UNMSM 2000-I

A) 50 minutos B) 45 minutos
C) 55 minutos D) 1 hora
E) 40 minutos

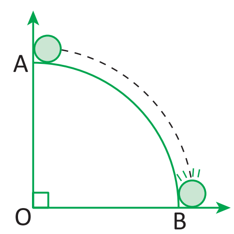
28. Dos personas A y B separadas por una distancia de 3600 metros salen a la misma hora y van al encuentro una de otra. El encuentro ocurre a los 2000 metros de uno de los puntos de partida. Si la persona que va más despacio hubiera salido 6 minutos antes que la otra, el encuentro hubiera ocurrido en el punto medio del camino, ¿cuál es la rapidez de cada persona?

A) 60 m/min y 70 m/min B) 50 m/min y 75 m/min
C) 50 m/min y 70 m/min D) 60 m/min y 75 m/min
E) 65 m/min y 75 m/min

29. Dos círculos concéntricos de radios 60 y 40 cm respectivamente, se mueven de modo que sus centros recorren 2 rectas perpendiculares, con una rapidez de 8 y 6 m/s cada uno. ¿En qué tiempo los círculos pasarán de la posición tangentes interiores a tangentes exteriores?

A) 6 s B) 8 s C) 10 s D) 12 s E) 10,5 s

30. Un móvil se desplaza de "A" hacia "B" en 10 s. Halla la rapidez media del móvil si: OA = 10 m.



A) 2 m/s
B) $\sqrt{2}$ m/s
C) $\frac{1}{2}$ m/s
D) 1 m/s
E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m/s

Claves

NIVEL 1	9. C	17. B	25. A
1. C	10. B	18. C	26. D
2. D	**NIVEL 2**	19. A	27. A
3. C	11. A	20. C	28. D
4. A	12. C	**NIVEL 3**	29. C
5. A	13. C	21. D	30. B
6. B	14. C	22. C	
7. E	15. B	23. C	
8. D	16. A	24. A	

Cronometría

Nota

Para expresar el número de intervalos, al número de campanadas le restamos una unidad.

Ejemplo:

6 campanadas <> 5 intervalos
4 campanadas <> 3 intervalos
8 campanadas <> 7 intervalos

Para un mejor aprendizaje de este capítulo, clasificaremos los problemas de la siguiente manera:

- Problemas sobre campanadas.
- Problemas sobre tiempo transcurrido y tiempo que falta transcurrir.
- Problemas sobre adelantos y atrasos.
- Problemas sobre ángulos formados por las manecillas del reloj.

PROBLEMAS SOBRE CAMPANADAS

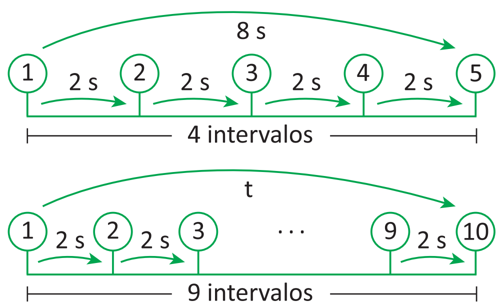
En este grupo veremos problemas que involucran campanas y relojes que indican la hora dando campanadas. Para ello se debe tener en cuenta lo siguiente:

Número de intervalos = Número de campanadas − 1

Tiempo total = (número de intervalos) × (tiempo de cada intervalo)

Ejemplo:
Se tiene un reloj que indica la hora con igual número de campanadas. Si para indicar que son las 5:00 a.m., demoró 8 s, ¿cuánto demorará para indicar que son las 10:00 a.m.?

Resolución:
Gráficamente:



5:00 a.m. ⇒ 5 campanadas
n.° intervalos = 5 − 1 = 4
Tiempo de cada intervalo = 8 ÷ 4 = 2 s

10:00 a.m. ⇒ 10 campanadas
n.° intervalos = 10 − 1 = 9
Tiempo total = 9 × 2 s = 18 s

∴ Demora 18 s.

Atención

Otra forma:
5 campanadas ⟶ 8 s
10 campanadas ⟶ x s

Luego:
5 campanadas <> 4 intervalos
10 campanadas <> 9 intervalos

Entonces:
8 s ⟶ 4 intervalos
x ⟶ 9 intervalos

$4x = 72$
$x = 18$ s

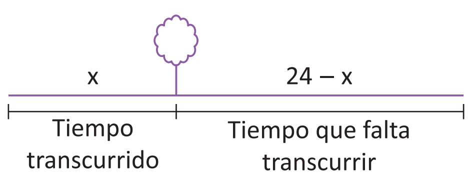


PROBLEMAS SOBRE TIEMPO TRANSCURRIDO Y TIEMPO QUE FALTA TRANSCURRIR

En este grupo veremos problemas que involucran el transcurrir del tiempo ya sea 1 día, 1 semana, 1 mes o 1 año.

Ejemplo:
Si el tiempo transcurrido del día excede en 4 h a la tercera parte del tiempo que queda del día. ¿Qué hora es?

Resolución:



Según el enunciado:

$$x - \left(\frac{24 - x}{3}\right) = 4$$

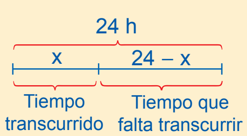
$$3x - 24 + x = 12$$

$$4x = 36 \Rightarrow x = 9$$

∴ Son las 9:00 a.m.

Importante

Para este tipo de problemas nos ayudaremos de un gráfico representado por una recta, tomando como base 1 día que tiene 24 horas.





PROBLEMAS SOBRE ADELANTOS Y ATRASOS

En este grupo veremos problemas que involucran relojes que por un mal funcionamiento se adelantan o atrasan. Para ello se debe tener en cuenta lo siguiente:

Cuando un reloj se atrasa:

Hora real = Hora que marca + Atraso total

Cuando un reloj se adelanta:

Hora real = Hora que marca – Adelanto total

Ejemplo 1:
Siendo las 4:00 p.m. un reloj se empieza a atrasar a razón de 4 minutos cada hora. ¿Qué hora marcará cuando en realidad sean las 4:00 a.m. del día siguiente?

Resolución:
- Observamos que desde las 4:00 p.m. hasta las 4:00 a.m. hay 12 horas.
- Si en 1 hora se atrasa 4 minutos, entonces en 12 horas se atrasa: 12(4) = 48 minutos.
- Luego: hora que marca = 4:00 a.m. – 48 min = 3:12 a.m.

∴ Marcará las 3:12 a.m.

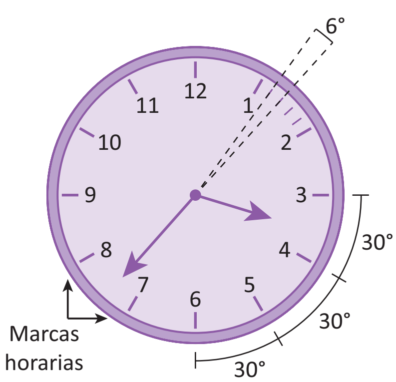
Ejemplo 2:
Siendo las 3:30 p.m. un reloj marca las 3:36 p.m. Si dicho reloj se adelanta 1 minuto cada 2 horas, ¿a qué hora empezó a adelantarse?

Resolución:
- Como son las 3:30 p.m. y el reloj está marcando las 3:36 p.m., entonces se ha adelantado 6 minutos.
- Ahora por cada 2 horas se adelanta 1 minuto, entonces para que tenga un adelanto de 6 minutos debió transcurrir: 6(2) = 12 horas.
- Luego: hora que empezó a adelantarse = 3:30 p.m. – 12 h = 3:30 a.m.

∴ Empezó adelantarse a las 3:30 a.m.

PROBLEMAS SOBRE ÁNGULOS FORMADOS POR LAS MANECILLAS DE UN RELOJ

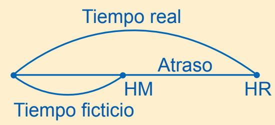
En este tipo de problemas veremos aquellos que involucran al desplazamiento tanto del horario como del minutero, y el ángulo que forman las manecillas a determinadas horas.



- La circunferencia del reloj está dividida en 12 espacios separados por marcas horarias.
- Cada espacio entre las marcas horarias tiene una medida de 30°.
- El espacio comprendido entre 2 marcas horarias está dividido en 5 espacios que son los minutos.
- El espacio correspondiente a un minuto tiene una medida de 6°.

Atención

Atraso



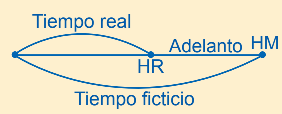
HR = HM + Atraso

Donde:
HR: hora real
HM: hora marcada



Atención

Adelanto



HR = HM – Adelanto

Donde:
HR: hora real
HM: hora marcada

Recuerda

- Un reloj de manecillas posee 12 divisiones que corresponden a las horas y cada una de estas posee 5 pequeñas divisiones que corresponden a los minutos.
- La circunferencia del reloj representa 360°.

Luego:
60 div <> 60 min <> 360°
1 div <> 1 min <> 6°



Atención

Cada vez que el minutero avanza una cantidad en minutos, entonces el horario avanza en minutos la doceava parte de dicha cantidad.

Ejemplo:

minutero	horario
36 min	3 min
12 min	1 min



Observación

Cada vez que el minutero avanza una cantidad en minutos, entonces el horario avanza la mitad de dicha cantidad pero en grados.

Ejemplo:

minutero	horario
50 min	25°
20 min	10°

Importante

Para resolver este tipo de problemas se recomienda analizar a partir de la hora exacta anterior a la hora indicada.

Ejemplo:

Hora indicada	Hora exacta
2:35	2:00
3:47	3:00
4:15	4:00



Ahora analicemos los desplazamientos tanto del horario como del minutero.

a)

Desplazamiento del minutero (en minutos)	Desplazamiento del horario (en minutos)
60 min	5 min
30 min	2,5 min
48 min	4 min
24 min	2 min
x min	(x/12) min

b)

Desplazamiento del minutero (en minutos)	Desplazamiento del horario (en grados)
60 min	30°
30 min	15°
40 min	20°
10 min	5°
x min	(x/2)°

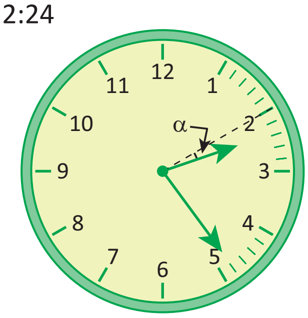
Ejemplos:

Grafica las posiciones de las manecillas del reloj en cada caso, e indica el ángulo que se desplaza el horario.

- 2:24
- 4:12
- 6:40
- 10:44

Resolución:

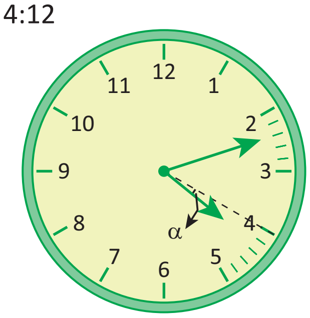
- 2:24



$\alpha = \left(\frac{24}{2}\right)^{\circ}$

$\alpha = 12^{\circ}$

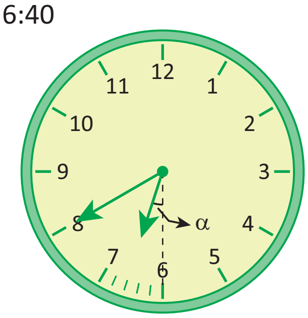
- 4:12



$\alpha = \left(\frac{12}{2}\right)^{\circ}$

$\alpha = 6^{\circ}$

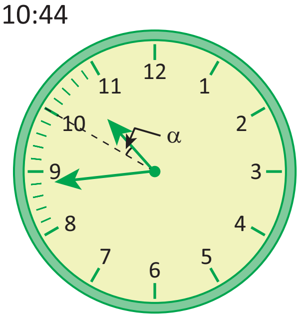
- 6:40



$\alpha = \left(\frac{40}{2}\right)^{\circ}$

$\alpha = 20^{\circ}$

- 10:44

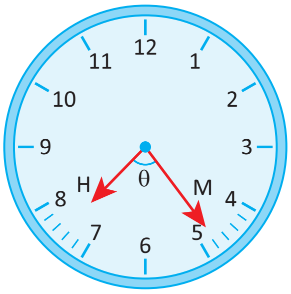


$\alpha = \left(\frac{44}{2}\right)^{\circ}$

$\alpha = 22^{\circ}$

Fórmulas para calcular el ángulo que forman el horario y el minutero

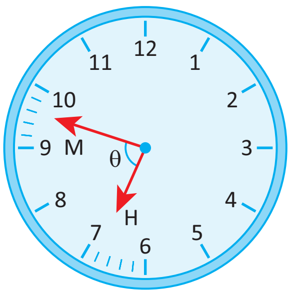
- Cuando el horario adelanta al minutero.



"H" antes que "M"

$$\theta = 30H - \frac{11}{2}M$$

- Cuando el minutero adelanta al horario.

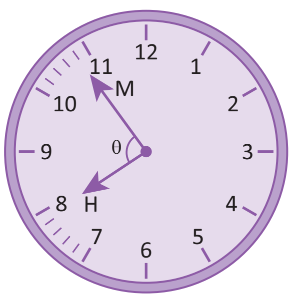


"M" antes que "H"

$$\theta = \frac{11}{2}M - 30H$$

Ejemplo:
Halla el ángulo formado por las manecillas del reloj cuando son las 7:54.

Resolución:
Gráficamente:



Se observa que el minutero adelanta al horario, entonces usamos la segunda relación:

$$\theta = \frac{11}{2}M - 30H$$

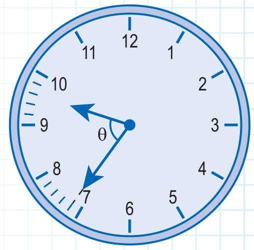
$$\theta = \frac{11}{2}(54) - 30(7)$$

$$\theta = 297 - 210$$

$$\theta = 87°$$

Nota

Halla θ:

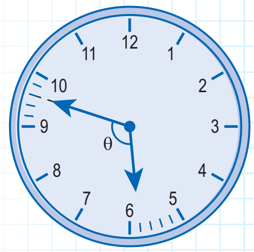


$H = 9$; $M = 36$

$\theta = 30(9) - \frac{11}{2}(36) \Rightarrow \theta = 72°$

Nota

Halla θ:



$H = 5$; $M = 48$

$\theta = \frac{11}{2}(48) - 30(5) \Rightarrow \theta = 114°$

Observación

Cuando el horario marca las 12 h se toma $H = 0$.

Ejemplo:
¿Qué ángulo forman las agujas del reloj a las 12:10?

$M = 10$; $H = 0$

$\theta = \frac{11}{2}(M) - 30H$

$\theta = \frac{11}{2}(10) - 30(0)$

$\theta = 55°$



Problemas resueltos

1 Un reloj da 4 campanadas en 6 s. ¿En cuántos segundos dará 8 campanadas?

Resolución:

Campanadas	Intervalos		Tiempo
4	3	→	6
8	7	→	x

Luego: $3x = 6 \cdot 7$

$x = 14$ s

$\therefore$ 8 campanadas dará en 14 s.

2 El reloj de una iglesia suena solamente cada hora para indicar la hora con el número de campanadas. ¿Cuántas campanadas dará en una semana?

Resolución:

En 1 día:

Hasta el mediodía:

$1 + 2 + 3 + ... + 10 + 11 + 12 = 78$

Hasta la medianoche:

$1 + 2 + 3 + ... + 10 + 11 + 12 = 78$

En un día el total será:

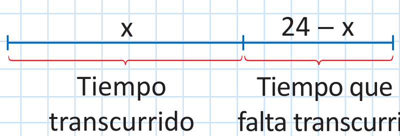
$2(78) = 156$

En una semana:

$7(156) = 1092$ campanadas

3 Si el doble de las horas transcurridas en un día es igual al cuádruple de las que faltan transcurrir. ¿Qué hora es?

Resolución:



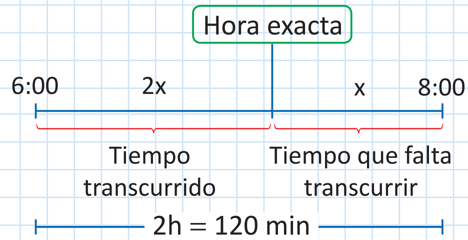
Según el enunciado:

$$2x = 4(24 - x)$$
$$2x = 96 - 4x$$
$$6x = 96$$
$$x = 16$$

$\therefore$ Son las 4:00 p.m.

4 Faltan para las 8:00 a.m. la mitad de los minutos que pasarán desde las 6:00 a.m. de esta mañana hasta la hora actual. ¿Qué hora indica el reloj?

Resolución:



Del gráfico:

$2x + x = 120 \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = 40$ min

Luego: $2x = 80$ min

Hora exacta: 6 h + 80 min

$\therefore$ Son las 7:20 a.m.

5 Un reloj se adelanta 10 minutos cada hora. Si son las 8:00 a.m. ¿Qué hora marcará el reloj a las 2 p.m.?

Resolución:

El tiempo transcurrido desde las 8:00 a.m. hasta las 2 p.m. es 6 horas.

Si:

1 h → 10 min

6 h → x

$\Rightarrow x = 6 \times 10$

$x = 60$ min $= 1$ h

Luego, la hora que marca es:

2 p.m. + 1 h = 3 p.m.

6 Un reloj se retrasa 10 minutos por día. ¿En cuántos días volverá a marcar la hora exacta?

Resolución:

Para que vuelva a marcar la hora exacta se debe retrasar 12 h = 720 min.

Luego:

10 min → 1 día

720 min → x

$10x = 720 \Rightarrow x = 72$ días

7 ¿Cuánto mide el ángulo formado por las manecillas del reloj a las 6 h 20 min?

Resolución:

Como el horario está delante del minutero, podemos aplicar:

$\theta = 30H - \frac{11}{2}M$, donde: $H = 6$
$M = 20$

Reemplazando:

$\theta = 30(6) - \frac{11}{2}(20) \Rightarrow 180 - 110 = 70°$

8 ¿Cuántos minutos después de las 3 h se forma un ángulo de 53°, luego que el minutero sobrepasó al horario?

Resolución:

Como el minutero adelanta al horario podemos usar:

$\theta = \frac{11}{2}M - 30H$, donde: $\theta = 53°$
$H = 3$

Reemplazando:

$53° = \frac{11}{2}M - 30(3)$

$53° = \frac{11}{2}M - 90$

$143 = \frac{11}{2}M \Rightarrow M = 26$

Luego, 26 min después de las 3 h se forma el ángulo de 53°.

9 ¿A qué hora entre las 4 y 5 h las manecillas de un reloj forman un ángulo recto por primera vez?

Resolución:

Por primera vez cuando el horario está delante del minutero.

$\theta = 30H - \frac{11}{2}M$ $\theta = 90°$
$H = 4$

Reemplazando:

$90° = 30(4) - \frac{11}{2}M \Rightarrow \frac{11}{2}M = 30 \Rightarrow M = \frac{60}{11}$

$\therefore$ La hora será: 4 h $5\frac{5}{11}$ min.

10 ¿A qué hora entre las 2 y las 3, las agujas de un reloj se superponen?

Resolución:

Como las agujas se superponen: $\theta = 0°$; $H = 2$

Entonces: $\frac{11}{2}M = 30H$

Reemplazando:

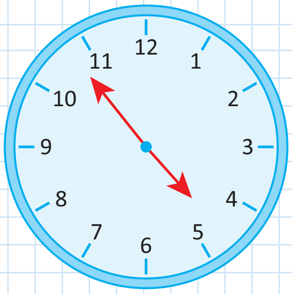
$\frac{11}{2}M = 30(2) \Rightarrow M = \frac{120}{11}$

$\therefore$ Se superponen a las 2 h $10\frac{10}{11}$ min.

11 ¿A qué hora, entre las 4 y 5, las manecillas de un reloj se encuentran en sentido opuesto?

Resolución:

Veamos en el reloj:



Como el minutero está adelante del horario, usamos la fórmula:

$\theta = \frac{11}{2}M - 30H$

Donde. $H = 4$; $\theta = 180°$

Reemplazamos:

$180 = \frac{11}{2}M - 30(4)$

$\frac{11}{2}M = 300$

$M = \frac{600}{11} \Rightarrow M = 54\frac{6}{11}$

$\therefore$ Son las 4 h $54\frac{6}{11}$ min.

Actividades de razonamiento

1. Un campanario tarda 4 s en tocar 5 campanadas. ¿Cuánto tardará en tocar 10 campanadas?

A) 3 s B) 6 s C) 9 s D) 12 s E) 15 s

2. Un campanario toca 9 campanadas en 24 s. ¿Cuántas campanadas tocará en 18 segundos?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

3. Un campanario da 7 campanadas en 4 segundos. ¿Cuánto tiempo demorará en dar 49 campanadas?

A) 30 s B) 32 s C) 35 s D) 40 s E) 42 s

4. Un reloj da 3 campanadas cada 3 minutos. ¿En cuántos minutos dará 9 campanadas?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

5. Un campanario señala las horas con igual número de campanadas. Si para dar las 5:00 a.m. demora 8 segundos, ¿cuánto demorará para indicar las 12:00 m.?

A) 15 s B) 22 s C) 43 s D) 16 s E) 25 s

6. Un reloj se adelanta 7 minutos cada 6 horas. Al cabo de 18 horas, ¿cuánto se habrá adelantado?

A) 15 min B) 16 min C) 18 min
D) 21 min E) 24 min

7. ¿Qué hora es, si en este instante el tiempo que falta para acabar el día excede en 5 horas al tiempo transcurrido?

A) 9:10 B) 9:20 C) 9:30 D) 9:40 E) 9:50

8. Manuel le pregunta a José por la hora y este le responde: “Para saber la hora, debes sumar la mitad del tiempo transcurrido del día con 1/3 del tiempo que falta para acabar el día”. ¿Qué hora es?

A) 9:35 B) 9:34 C) 9:36 D) 9:45 E) 9:54

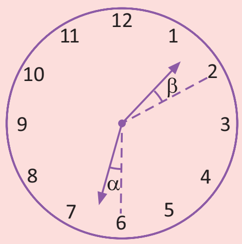
9. Un trabajador puede realizar una tarea en 7 horas. ¿Qué parte de la tarea hará desde las 8:45 a.m. hasta las 11:05 a.m.?

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/5 D) 2/3 E) 3/4

10. Son más de las 6 a.m. pero todavía no son las 10 a.m.. Si los minutos que transcurrieron es a los minutos que faltan por transcurrir como 3 es a 5. ¿Qué hora será dentro de 4 horas?

A) 10 h 30 min B) 7 h 30 min C) 9 h 30 min
D) 11 h 30 min E) 8 h 30 min

11. Halla $\frac{(\alpha+\beta)}{2}$, si el reloj marca la 1:32 p.m.



A) 7° B) 9° C) 11° D) 13° E) 15°

12. ¿Cuántos grados le lleva el ángulo mayor al menor que forma el horario y el minutero a las 3:50?

A) 15° B) 17° C) 14° D) 20° E) 10°

13. Entre las 8 y las 9 h, ¿a qué hora están superpuestas las agujas de un reloj?

A) 8 h 44 min B) 8 h 42 min C) 8 h 45 min

D) 8 h $43\frac{7}{11}$ min E) 8 h $44\frac{7}{11}$ min

14. ¿Cuál es el mayor ángulo que forman las manecillas de un reloj a las 12 h 36 min?

A) 178° B) 188° C) 198°
D) 162° E) 196°

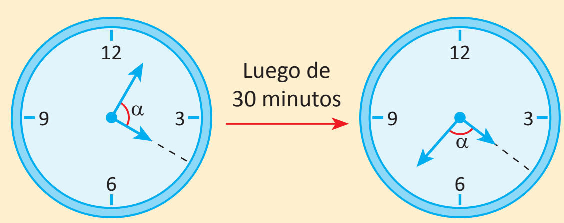
Claves

1. C
2. A
3. B
4. B
5. B
6. D
7. C
8. C
9. B
10. D
11. D
12. E
13. D
14. C

Reto

Halla "α":





Rpta.: 82,5°

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. ¿Qué hora es, si el tiempo transcurrido representa $\frac{1}{5}$ del tiempo que falta transcurrir?

   A) 3 a.m. B) 4 a.m. C) 5 a.m.
   D) 6 a.m. E) 7 a.m.

2. ¿Qué hora es, si el tiempo transcurrido representa los $\frac{3}{5}$ del tiempo que falta transcurrir?

   A) 17 h B) 8 h C) 9 h D) 10 h E) 12 h

3. Un reloj da 6 campanadas en 5 segundos. ¿En cuántos segundos dará 12 campanadas?

   A) 10 s B) 11 s C) 12 s D) 14 s E) 13 s

4. Faltan para las 9 horas la mitad de minutos que pasaron desde las 6 h. ¿Qué hora marca el reloj?

   A) 7 h B) 6 h C) 9 h D) 8 h E) 5 h

5. Silvana esperó a Juan en un paradero desde las 5 de la tarde con 35 minutos, y este apareció a las 6 de la tarde con 28 minutos. ¿Cuántos minutos duró la espera?



   A) 52 min B) 53 min C) 45 min
   D) 48 min E) 51 min

6. En cierto momento del día, el tiempo transcurrido es 1/5 de lo que falta transcurrir. ¿Qué hora es?

   A) 7 a.m. B) 6 a.m. C) 5 a.m.
   D) 4 a.m. E) 3 p.m.

7. Un reloj da 4 campanadas en 6 s. ¿En cuánto tiempo dará 8 campanadas?

   A) 6 s B) 12 s C) 10 s D) 13 s E) 14 s

8. Se tiene que realizar una tarea en 12 horas. ¿Qué parte de la tarea se hará desde las 6:15 a.m. hasta las 7:45 a.m.?

   A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{6}$
   D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

9. Un reloj da 5 campanadas en 5 s. ¿Cuántas campanadas dará en 25 segundos?

   A) 19 B) 20 C) 21 D) 23 E) 25

10. Un reloj se adelanta 2 minutos cada 8 minutos. Si ahora marca las 2 h 15 min y hace 3 horas que se adelanta, entonces la hora correcta es:

   A) 1 h 20 min B) 1 h 22 min
   C) 1 h 30 min D) 1 h 45 min
   E) 1 h 40 min

NIVEL 2

11. La cuerda de un reloj dura 16 horas 50 min. Si se da cuerda al reloj a las 3 horas 45 min, ¿hasta qué hora funcionará el reloj?
A) 21 h 15 min B) 21 h 35 min
C) 18 h 25 min D) 20 h 35 min
E) 20 h 45 min

12. Un campanario tarda 8 segundos en tocar 5 campanadas. ¿Cuánto tiempo tardará en tocar 10 campanadas?
A) 16 s B) 17 s C) 19 s D) 18 s E) 20 s

13. Un campanario tarda 3 segundos en tocar 4 campanadas. ¿Cuántas campanadas tocará en 8 segundos?
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 7

14. Un reloj se adelanta 3 minutos cada 5 minutos. Si hace ya 45 minutos que viene funcionando con ese desperfecto, ¿qué hora señalará el reloj cuando sean en realidad las 8 h 50 min?
A) 8:17 B) 10:25 C) 8:23 D) 9:17 E) 9:23

15. Un reloj señala la hora con igual número de campanadas. Si para indicar las 4 a.m. demoró 5 segundos, ¿cuánto tiempo empleará para indicar las 7 p.m.?
A) 10 s B) 9 s C) 30 s D) 18 s E) 19

16. Un reloj se atrasa 5 minutos cada 45 minutos. Si ahora marca 4 h 10 min y hace 6 horas que se atrasa, entonces la hora correcta es:
A) 4 h 55 min B) 4 h 53 min C) 4 h 51 min
D) 4 h 50 min E) 4 h 29 min

17. Un reloj se adelanta 4 segundos por hora. ¿Cuántos días como mínimo, deberán transcurrir para que vuelva a marcar la hora exacta?
A) 600 días B) 500 días C) 450 días
D) 700 días E) 850 días

18. Un reloj de alarma da 73 pitadas en 15 segundos. ¿Cuánto se demorará para dar 19 pitadas?
A) 3,74 s B) 3,75 s C) 3,76 s
D) 3,78 s E) 3,79 s

19. Un reloj tarda 12 segundos en tocar n campanadas. Si entre campanada y campanada tarda tantos segundos como campanadas da, ¿cuál es el valor de n?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

NIVEL 3

20. ¿A qué hora entre las 10 y las 11 está el minutero exactamente a 6 minutos del horario?
A) 10 h 42 min B) 10 h 46 min C) 10 h 48 min
D) 10 h 30 min E) 10 h 52 min

(21) ¿Cuál es el menor ángulo que forman las manecillas del horario y minutero a las 3 h 30 min?

A) 60° B) 70° C) 75° D) 80° E) 85°

(22) Exactamente a las 9 de la mañana se malogra un reloj de modo que se adelanta 6 minutos cada 10 horas. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que dicho reloj marque nuevamente la hora exacta?

A) 50 días B) 49 días C) 48 días
D) 51 días E) 47 días

(23) ¿Qué ángulo forman entre sí las agujas del horario y minutero a las 9 h 10 min?

A) 145° B) 137° C) 123° D) 132° E) 134°

(24) ¿Cuál es el menor ángulo que forman las manecillas del horario y minutero a las 10 h 28 min?

A) 120° B) 125° C) 146° D) 134° E) 147°

(25) ¿Qué ángulo forman las manecillas del horario y minutero a las 9 h 18 min?

A) 191° B) 171° C) 176° D) 178° E) 177°

(26) ¿A qué hora entre las 8 y las 9 están opuestas las agujas del horario y minutero, aproximadamente?

A) 8 h $12\frac{10}{11}$ min B) 8 h $10\frac{10}{11}$ min

C) 8 h $20\frac{10}{11}$ min D) 8 h $12\frac{9}{11}$ min

E) 8 h $12\frac{9}{11}$ min

(27) Un reloj se adelanta 75 segundos por hora. Si el reloj es puesto a la hora exacta a las 6:00 a.m., ¿qué hora marcará cuando realmente sean las 8:00 p.m.?



UNI 2001-I

A) 20 h 17 min 30 s B) 20 h 42 min 30 s
C) 20 h 00 min 00 s D) 21 h 22 min 30 s
E) 20 h 22 min 30 s

(28) ¿A qué hora por segunda vez, horario y minutero formarán un ángulo de 40° entre las 4 y las 5 horas?

A) 4 h $19\frac{1}{2}$ min B) 4 h $29\frac{1}{3}$ min

C) 4 h $27\frac{1}{11}$ min D) 4 h $28\frac{1}{10}$ min

E) 4 h $29\frac{1}{11}$ min

Claves

NIVEL 1	8. A	15. A	22. A
1. B	9. C	16. D	23. A
2. C	10. C	17. C	24. C
3. B	NIVEL 2	18. B	25. B
4. D	11. D	19. C	26. B
5. B	12. D	NIVEL 3	27. A
6. D	13. B	20. C	28. E
7. E	14. D	21. C	

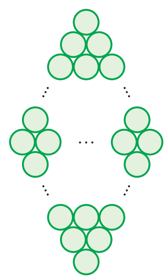
Inducción - deducción

RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Es el paso de las proposiciones particulares a generales, es decir, mediante el análisis de experiencias sencillas con las mismas características del problema original, llegamos a conclusiones con amplia posibilidad de ocurrencia que lo llamaremos caso general.

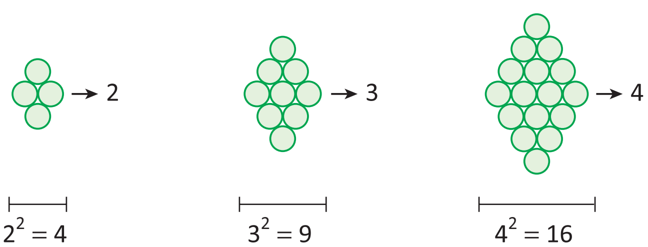
Casos particulares → Inducción → Caso general

Ejemplo:
¿Cuántas bolitas se pueden contar en total en la siguiente figura?



→ 50 bolitas

Resolución:
Analizamos los casos particulares, conservando la forma original.



∴ El número total de bolitas es: $50^2 = 2500$

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

Es aquel tipo de razonamiento que va de lo general a lo particular. Se parte de una afirmación general (que ya ha sido demostrada), la cual se aplica a casos particulares.

Caso general → Deducción → Casos particulares

Ejemplo:
- Se sabe que todos los bomberos son valientes.
- Se sabe también que Pedro es bombero.
  Por lo tanto, se deduce que Pedro es valiente.

Atención

Ejemplo:
$(25)^2 = 625$
$(45)^2 = 2025$
$(75)^2 = 5625$

Podemos concluir que todo número que termina en 5 al elevarlo al cuadrado su resultado termina en 25.
$(\overline{N5})^2 = ...25$



Nota

Analizando 3 casos particulares, conservando la forma original, tenemos que: La cantidad total de bolitas es el cuadrado del número de bolitas centrales en cada caso. Como se observa en el gráfico.

Importante

En esta parte se debe recordar las principales conclusiones básicas, ya aprendidas con anterioridad (criterios generales de la adición, sustracción, multiplicación y división) los cuales ayudarán a verificar los casos particulares.



Problemas resueltos

1 Calcula el valor de M y da como respuesta la suma de sus cifras, siendo:

$$M = (\underbrace{666 \ldots 66}_{12 \text{ cifras}})^2$$

Resolución:

Caso 1: $6^2 = 36 \Rightarrow$ suma de cifras $= 9 = 9(1)$

Caso 2: $66^2 = 4356 \Rightarrow$ suma de cifras $= 18 = 9(2)$

Caso 3: $666^2 = 44\,3556 \Rightarrow$ suma de cifras $= 27 = 9(3)$

Luego, la suma de cifras de M será: $9(12) = 108$

2 Si: $\dfrac{\overline{A2}}{\overline{1A}} = 3$; calcula: $E = 2(A + 3) + 7$

Resolución:

$\overline{A2} = 3 \times \overline{1A}$

$3 \times A = \ldots 2 \Rightarrow\ A = 4$

Luego: $E = 2(4 + 3) + 7$

$\therefore\ E = 21$

3 Calcula F

$F = \sqrt{98 \times 99 \times 100 \times 101 + 1}$

Resolución:

Observando nos damos cuenta que tiene una particularidad (producto de cuatro números consecutivos); analizamos los casos más simples:

Caso 1: $\sqrt{1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1} = 5 \Rightarrow 1 \times 4 + 1$

Caso 2: $\sqrt{2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1} = 11 \Rightarrow 2 \times 5 + 1$

Caso 3: $\sqrt{3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1} = 19 \Rightarrow 3 \times 6 + 1$

Luego, el resultado es igual a multiplicar el menor y mayor de los números y sumarle 1.

$\therefore\ F = 98 \times 101 + 1 = 9899$

4 Si: $P + R + E = 14$

$\overline{PR} + \overline{EP} = 125$

Halla: $\overline{PRE}$

Resolución:

Del dato:

$$\begin{array}{r} \overline{PR}\ + \\ \overline{EP} \\ \hline 125 \end{array}$$

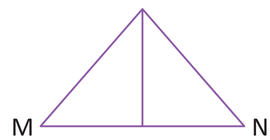
$P + R = 5 \Rightarrow E = 9$

$P + E = 12 \Rightarrow R = 2$

$P = 3$

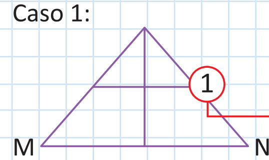
Luego: $\overline{PRE} = 329$

5 Si a la siguiente figura le trazamos 50 rectas paralelas a $\overline{MN}$, ¿cuántos triángulos se contarán en total?



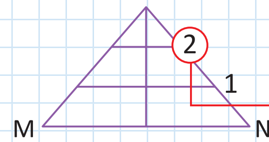
Resolución:

Caso 1:



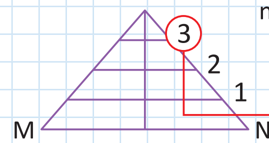
n.° de triángulos = 6 = 3(2) (+1)

Caso 2:



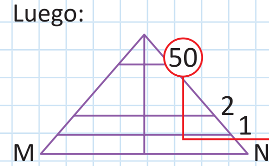
n.° de triángulos = 9 = 3(3) (+1)

Caso 3:



n.° de triángulos = 12 = 3(4) (+1)

Luego:



n.° total de triángulos = 3(51) (+1)

$\therefore$ El número total de triángulos es 153.

6 Si: $\overline{MARCOS} = 3(\overline{SMARCO})$

$S = 1\ \wedge\ O \neq$ cero; halla M.

Resolución:

$$\begin{array}{r} \overline{SMARCO}\ \times \\ 3 \\ \hline \overline{MARCOS} \end{array}$$

- $3 \times O = \ldots 1\ (S = 1) \Rightarrow\ O = 7$
- $3C + 2 = \ldots 7$ (se lleva 2) $\Rightarrow\ C = 5$
- $3R + 1 = \ldots 5$ (se lleva 1) $\Rightarrow\ R = 8$
- $3A + 2 = \ldots 8$ (se lleva 2) $\Rightarrow A = 2$
- $3M = \ldots 2 \Rightarrow\ M = 4$

7 Halla la suma de cifras del resultado de:

$$T = \underbrace{999 \ldots 999}_{50 \text{ cifras}} \times 12$$

Resolución:

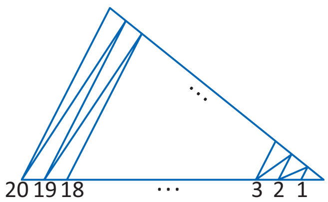
Caso 1: $9 \times 12 = 108 \Rightarrow 9 = 9(1)$

Caso 2: $99 \times 12 = 1188 \Rightarrow 18 = 9(2)$

Caso 3: $999 \times 12 = 11\,988 \Rightarrow 27 = 9(3)$

La suma de cifras de T será: $9(50) = 450$

8 ¿Cuántos triángulos hay en la figura mostrada?

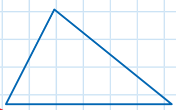


Resolución:

Aplicamos inducción:

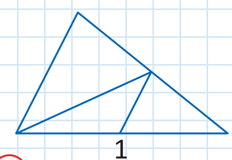
n.° de triángulos

Caso 1:



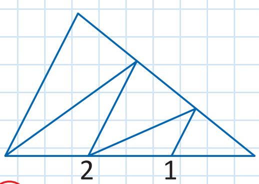
① -1 $\quad 1 = 1 + 4(0)$

Caso 2:



② -1 $\quad 5 = 1 + 4(1)$

Caso 3:



③ -1 $\quad 9 = 1 + 4(2)$

$\therefore$ El número de triángulos es: $1 + 4(19) = 77$

8 Si: $8^n - 8^{n-1} = 14$, entonces $(3n)^{3n}$ es igual a:

Resolución:

$8^n - \dfrac{8^n}{8} = 14 \Rightarrow 8^{n+1} - 8^n = 8 \times 14$

$7 \times 8^n = 8 \times 14 \Rightarrow 8^n = 16$

$2^{3n} = 2^4 \Rightarrow 3n = 4$

$\therefore (3n)^{3n} = 4^4 = 256$

10 Si: $a + b + c = 0$

Calcula la suma de las cifras de T:

$$T = (\underbrace{\overline{xxx \ldots xxx}}_{100 \text{ cifras}})^2$$

Sabiendo además que:

$$x = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$$

Resolución:

$a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \qquad \ldots (\alpha)$

Luego: $x = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$

$= \dfrac{3abc}{abc} = 3 \Rightarrow x = 3$

Además: $T = (\underbrace{333 \ldots 333}_{100 \text{ cifras}})^2$

Aplicamos inducción:

Suma de cifras

$3^2 = 9 \qquad 9 = 9(1)$

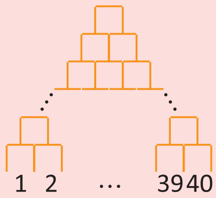
$33^2 = 1089 \qquad 18 = 9(2)$

$333^2 = 110\,889 \qquad 27 = 9(3)$

$\therefore$ Suma de cifras $= 9(100) = 900$

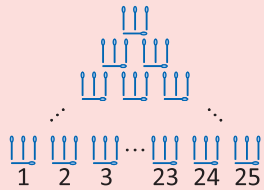
Actividades de razonamiento

1. ¿Cuántos palitos se han empleado en total para formar la siguiente figura?



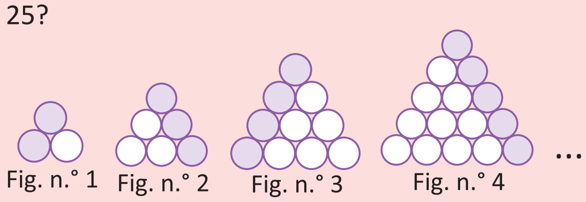
A) 1520 B) 1560 C) 1848 D) 1763 E) 1680

2. ¿Cuántos cerillos se han utilizado para formar la siguiente figura?



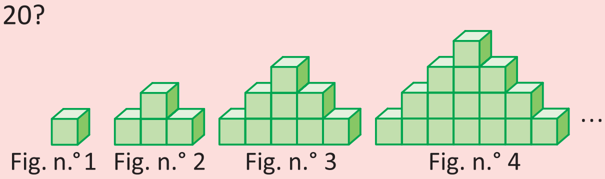
A) 1300 B) 1200 C) 1400 D) 1500 E) 1100

3. ¿Cuántas bolitas blancas habrá en la figura número 25?



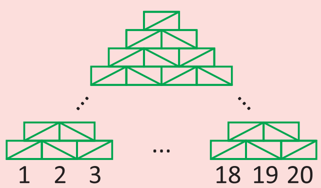
A) 305 B) 325 C) 300 D) 335 E) 315

4. ¿Cuántos cubos simples presenta la figura número 20?



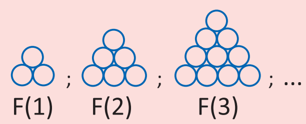
A) 375 B) 350 C) 300 D) 200 E) 400

5. ¿Cuántos triángulos se pueden contar en la siguiente figura?



A) 420 B) 250 C) 610 D) 345 E) 820

6. ¿Cuántos puntos de contacto hay en F(20)?



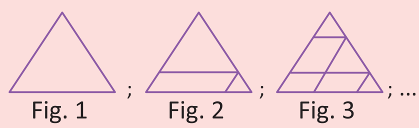
A) 450 B) 500 C) 550 D) 630 E) 650

7. Calcula la suma de cifras del resultado de A.

$$A = \underbrace{555...555}_{100 \text{ cifras}} \times \underbrace{999...999}_{100 \text{ cifras}}$$

A) 925 B) 625 C) 905 D) 900 E) 855

8. ¿Cuántos triángulos habrá en la figura de posición 20?



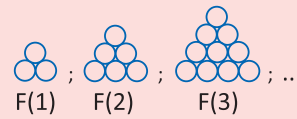
A) 190 B) 240 C) 420 D) 200 E) 210

9. Calcula la suma de cifras del resultado de A.

$$A = (\underbrace{999...9995}_{101\ \text{cifras}})^2$$

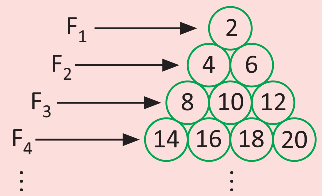
A) 900 B) 925 C) 625 D) 901 E) 907

10. Calcula el total de bolitas de F(15).



A) 272 B) 150 C) 136 D) 250 E) 408

11. Calcula la suma de los números de la fila 20 (F_{20}) en:



A) 8020 B) 4040 C) 16 020
D) 8000 E) 16 000

12. ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra BUENO?

```
        B
      U   U
    E   E   E
  N   N   N   N
O   O   O   O   O
```

A) 8 B) 16 C) 32 D) 48 E) 64

13. Calcula la suma de cifras del resultado de N.

$$N = \sqrt{\underbrace{111...111}_{200\ \text{cifras}} - \underbrace{222...222}_{100\ \text{cifras}}}$$

A) 100 B) 200 C) 300 D) 450 E) 900

14. Calcula:

$$M = \frac{23}{13} + \frac{2323}{1313} + \frac{232\,323}{131\,313} + ... + \frac{\overbrace{23...23}^{78\ \text{cifras}}}{\underbrace{13...13}_{78\ \text{cifras}}}$$

A) 46 B) 23 C) 69 D) 92 E) 115

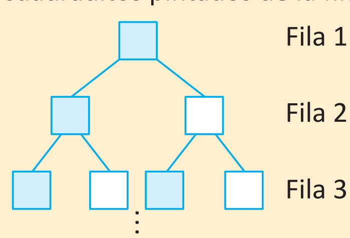
Claves

1. E 2. A 3. B 4. E 5. C 6. D 7. D 8. E 9. E 10. C 11. A 12. B 13. C 14. C

Reto



Calcula el total de cuadraditos existentes, menos el número de cuadraditos pintados de la fila 20.

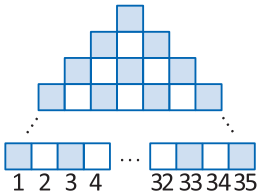


Rpta.: 2^{18}

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. ¿Cuántos cuadraditos no sombreados presenta la siguiente figura?



A) 210
B) 171
C) 245
D) 190
E) 153

2. En la siguiente sucesión, determina el número de esferas en la figura 23.

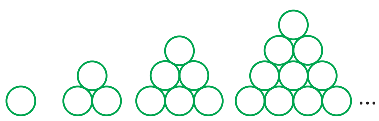


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 ...

A) 253
B) 276
C) 325
D) 300
E) 552

3. Halla la suma de cifras del resultado final de:

$$M = (\underbrace{6666...66}_{135\text{ cifras}})^2$$

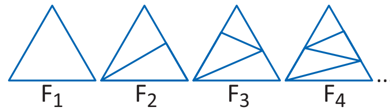
A) 1215 B) 1422 C) 1400 D) 1323 E) 1200

4. En el siguiente arreglo numérico, halla la suma de todos los términos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ... & 30 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & ... & 31 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & ... & 32 \\ \vdots & & & & & \\ 30 & & & & ... & \end{bmatrix}$$

A) 30 000 B) 23 400 C) 36 000
D) 27 000 E) 90 000

5. ¿Cuántos triángulos hay en F_{80}?



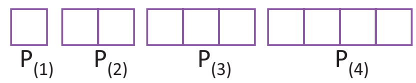
A) 100
B) 180
C) 190
D) 159
E) 179

6. Halla la suma de cifras de S.

$$S = (\underbrace{6666...6}_{a\text{ cifras}})^2$$

A) $3a^2 + 1$ B) $4a + 2$ C) $9a$
D) $25a - 6$ E) $5a^2 - 2$

7. ¿Cuántos rectángulos se podrán contar como máximo en la posición $P_{(15)}$?



A) 120 B) 140 C) 150 D) 160 E) 180

8. Calcula la siguiente suma:

$$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + ... + \frac{1}{650}$$

A) $\frac{1}{650}$ B) $\frac{25}{26}$ C) 1 D) $\frac{26}{27}$ E) $\frac{26}{650}$

9. Calcula la suma de los términos de la fila 23.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \rightarrow F_1 \\ & & 3 & & 5 & & \rightarrow F_2 \\ & 7 & & 9 & & 11 & \rightarrow F_3 \\ 13 & & 15 & & 17 & & 19 \rightarrow F_4 \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \ddots & & \ddots \end{array}$$

A) 13 243 B) 16 343 C) 12 167 D) 15 342 E) 2654

(10) Calcula la suma de cifras del resultado de:

$$\sqrt{\underbrace{1111...11}_{50\text{ cifras}} - \underbrace{22...2}_{25\text{ cifras}}}$$

A) 50 B) 75 C) 200 D) 125 E) 625

NIVEL 2

(11) Calcula el valor de: $M = \sqrt{1 + 40 \times 41 \times 42 \times 43}$
Da como respuesta la suma de sus cifras.

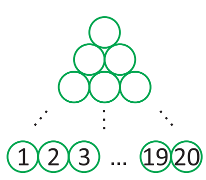
A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

(12) Calcula la suma de términos del siguiente arreglo de diez filas por diez columnas.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 & \dots & 30 \\ 6 & 9 & 12 & \dots & & 33 \\ 9 & 12 & 15 & \dots & & 36 \\ 12 & 15 & 18 & \dots & & \\ \vdots & & & & & \\ 30 & \dots & & \dots & & \end{bmatrix}$$

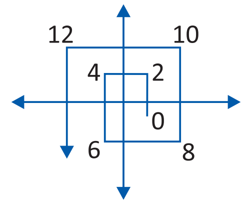
A) 2515
B) 3000
C) 3421
D) 3993
E) 2187

(13) Halla el número total de puntos de contacto en el siguiente arreglo:



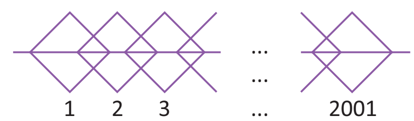
A) 810
B) 570
C) 670
D) 520
E) 940

(14) ¿Cuántos puntos de intersección (línea - eje) se podrán contar en la siguiente configuración si la enumeración continúa hasta 50?



A) 23
B) 24
C) 25
D) 26
E) 27

(15) ¿Cuántos puntos de corte hay en la figura?



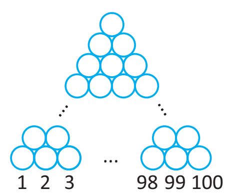
A) 8000 B) 8002 C) 8004 D) 2001 E) 4002

(16) Efectúa: $\dfrac{2 + 4 + 6 + ... + 4444}{1 + 3 + 5 + ... + 4443}$

A) $\dfrac{4444}{4443}$ B) $\dfrac{2223}{2222}$ C) $\dfrac{1}{2}$

D) $\dfrac{2222}{2221}$ E) $\dfrac{2221}{2220}$

(17) Calcula la cantidad total de esferas que hay en el siguiente arreglo triangular.



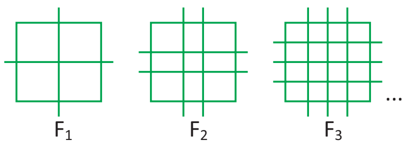
A) 5000
B) 5020
C) 5050
D) 5100
E) 5150

(18) Calcula la suma de cifras del resultado del siguiente producto:

$$R = \underbrace{(333...331)}_{100\text{ cifras}} \times \underbrace{(333...338)}_{100\text{ cifras}}$$

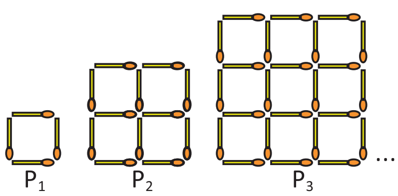
A) 899 B) 898 C) 798 D) 799 E) 784

(19) ¿Cuántos puntos de corte hay en F_{20}?



A) 400
B) 200
C) 480
D) 800
E) 420

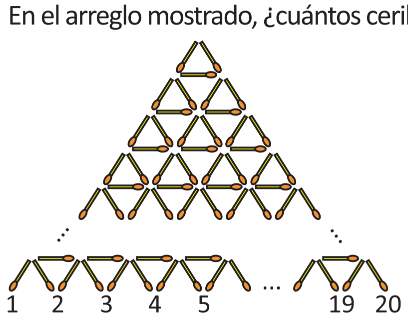
(20) ¿Cuántos cerillos se necesitarán para formar la figura de la posición (P_{200})?



A) 27 000
B) 80 300
C) 28 900
D) 80 400
E) 28 500

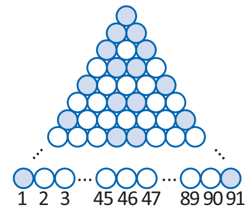
NIVEL 3

(21) En el arreglo mostrado, ¿cuántos cerillos hay en total?



A) 600
B) 551
C) 672
D) 650
E) 630

(22) ¿Cuántos círculos sombreados hay en el siguiente arreglo?

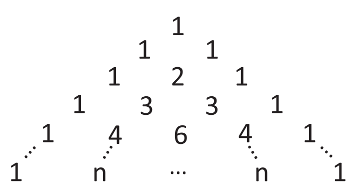


A) 183
B) 179
C) 205
D) 191
E) 181

(23) A la clase de inducción asistió cierto número de alumnos. Si cada uno fue cortés con los demás y se contaron 1275 saludos, ¿cuántos alumnos asistieron a la clase?

A) 25 B) 36 C) 40 D) 51 E) 50

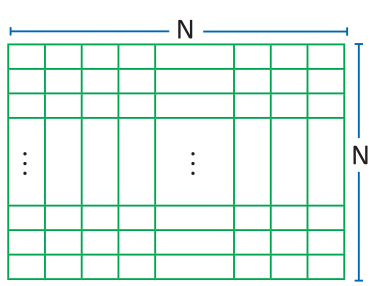
(24) Calcula la suma de todos los términos de:



A) $2^n - 1$
B) $2^{n+1} - 1$
C) $2^{n+1} + 1$
D) $2^{n-1} - 1$
E) $2^{n+1} - 2$

(25) A partir de la figura que se presenta a continuación, indica la expresión, en función de N, que permite determinar el número total de cuadrados.

UNI 2006-I



A) $\dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

B) $\dfrac{N(N+1)}{2}$

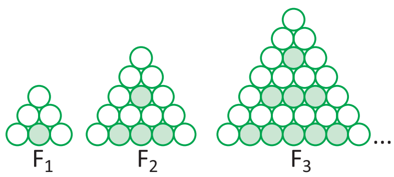
C) $\dfrac{N(N+1)(N+2)}{3}$

D) $\dfrac{N^2(N+1)}{4}$

E) $\dfrac{N^3(N+1)}{6}$

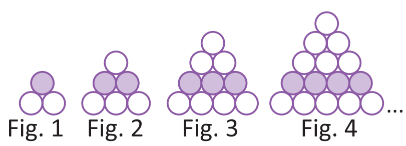
A) 2^{12} B) 2^{11} C) $2^{11}+1$
D) $2^{12}+1$ E) $2^{12}-1$

(26) En la siguiente secuencia, determina el número de círculos no sombreados, en la colección de círculos que ocupa la figura 20.



A) 400
B) 461
C) 561
D) 861
E) 360

(27) ¿Cuántas bolitas blancas habrá en la figura 40?



A) 800
B) 821
C) 856
D) 824
E) 868

(28) En el siguiente arreglo triangular, ¿de cuántas maneras diferentes se puede leer “por inducción” en dirección de arriba hacia abajo y a igual distancia una letra de otra en cada lectura?

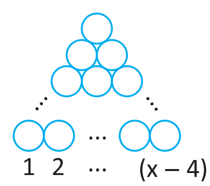
P
O O
R R R
I I I I
N N N N N
D D D D D D
U U U U U U U
C C C C C C C C
C C C C C C C C C
I I I I I I I I I I
O O O O O O O O O O O
N N N N N N N N N N N N

(29) En el siguiente arreglo numérico, halla la suma del primer y del último término de la fila 30.

Fila 1 → 1
Fila 2 → 3 5
Fila 3 → 7 9 11
Fila 4 → 13 15 17 19
Fila 5 → 21 23 25 27 29

A) 1024 B) 900 C) 1250
D) 1800 E) 3000

(30) Para construir el triángulo se han usado 120 esferas. Halla x.



A) 15
B) 16
C) 17
D) 18
E) 19

Claves

NIVEL 1	9. C	17. C	25. A
1. E	10. B	18. A	26. B
2. B	**NIVEL 2**	19. C	27. B
3. A	11. B	20. D	28. B
4. D	12. B	**NIVEL 3**	29. D
5. D	13. B	21. B	30. E
6. C	14. C	22. E	
7. A	15. B	23. D	
8. B	16. B	24. B	

Promedios

Nota

El promedio es una cantidad representativa de un conjunto de datos, cuyo valor está comprendido entre el menor y mayor de los datos.

Observación

Para dos o más datos

a) Si no todos son iguales:
$\overline{PA} > \overline{PG} > \overline{PH}$

b) Si todos los datos son iguales:
$\overline{PA} = \overline{PG} = \overline{PH}$



Atención

Solo para dos datos "a" y "b" se tiene:

- $\overline{MA}(a;\, b) = \frac{a+b}{2}$
- $\overline{MG}(a;\, b) = \sqrt{ab}$
- $\overline{MH}(a;\, b) = \frac{2ab}{a+b}$

También

- $\overline{MG}^2 = \overline{MA}\,.\,\overline{MH}$
- $(a-b)^2 = 4(\overline{MA}^2 - \overline{MG}^2)$

Nota

Ejemplo:
Determina la nota promedio de un alumno si al dar 3 exámenes obtuvo 12; 14 y 10; siendo los pesos 1; 2 y 3, respectivamente.

$$\overline{PP} = \frac{12(1)+14(2)+10(3)}{1+2+3}$$

$$\overline{PP} = \frac{12+28+30}{6} = 11,\widehat{6}$$

TIPOS DE PROMEDIO

Promedio aritmético ($\overline{PA}$)

Sean las cantidades: $a_1;\, a_2;\, a_3;\, ...;\, a_n$

$$\overline{PA} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$$

Ejemplo:
Calcula el promedio aritmético de 17; 20, 23; 25; 30 y 35.

Resolución: $\overline{PA} = \frac{17+20+23+25+30+35}{6} = \frac{150}{6} = 25$

Promedio geométrico ($\overline{PG}$)

Sean las cantidades: $a_1;\, a_2;\, a_3;\, ...;\, a_n$

$$\overline{PG} = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times ... \times a_n}$$

Ejemplo:
Calcula el promedio geométrico de 2; 3; 8 y 27.

Resolución: $\overline{PG} = \sqrt[4]{2 \times 3 \times 8 \times 27} = \sqrt[4]{16 \times 81} = 2 \times 3 = 6$

Promedio armónico ($\overline{PH}$)

Sean las cantidades: $a_1;\, a_2;\, a_3;\, ...;\, a_n$

$$\overline{PH} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

Ejemplo:
Calcula el promedio armónico de 2; 3; 5; 6 y 7.

Resolución: $\overline{PH} = \frac{5}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}} = \frac{5}{\frac{105+70+42+35+30}{210}} = \frac{5}{\frac{282}{210}} = \frac{175}{47}$

Promedio ponderado ($\overline{PP}$)

Sean las cantidades: $a_1;\, a_2;\, a_3;\, ...;\, a_n$
Los pesos: $p_1;\, p_2;\, p_3;\, ...;\, p_n$

$$\overline{PP} = \frac{a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + ... + a_np_n}{p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n}$$

Problemas resueltos

1 El promedio de 9 números es A/3. Si el promedio de 4 de ellos es 5A/8, halla el promedio de los números restantes.

Resolución:

Sean los números: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$

Por dato del problema:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9}{9} = \frac{A}{3}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 = 3A$$

Luego: $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \dfrac{5}{8}A$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{5}{2}A$$

Piden: $\dfrac{a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9}{5}$

Entonces:

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)}{5}$$

$$= \frac{3A - 5A/2}{5} = \frac{A/2}{5}$$

$$\therefore \frac{a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9}{5} = \frac{A}{10}$$

2 La media aritmética de 50 números es "n" y la media aritmética de otros 30 números es (n – 8). Calcula el valor de "n" si la media aritmética de los 80 números es 12.

Resolución:

Sean los 50 números: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{50}$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{50}}{50} = n$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{50} = 50n$$

Sean los 30 números: $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{30}$

$$\frac{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{30}}{30} = n - 8$$

$$\Rightarrow b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{30} = 30n - 240$$

Luego:

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{50}) + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{30})}{80} = 12$$

$$50n + 30n - 240 = 960$$

$$80n = 1200 \Rightarrow n = 15$$

$\therefore$ El valor de "n" es 15.

3 Para dos números enteros y diferentes de cero y de la unidad, se cumple que:

$(\overline{MA})^3 \,.\, (\overline{MH})^3 = 4096$

Halla la $\overline{MA}$.

Resolución:

Dato: $(\overline{MA})^3 \,.\, (\overline{MH})^3 = 4096$

$$(\overline{MA} \times \overline{MH})^3 = 4096$$

$$(\overline{MG}^2)^3 = 4096$$

$$(\overline{MG})^2 = 16$$

Sean "a" y "b" los números: $a \,.\, b = 16$

$a \to 8$, $b \to 2$

Finalmente: $MA(a, b) = \dfrac{8 + 2}{2} = 5$

4 La siguiente tabla muestra la distribución de las edades de los alumnos de un aula. Halla la edad promedio.

n.° de alumnos	6	4	8	10	9
Edad	12	13	14	11	15

Resolución:

Edad promedio

$$= \frac{6(12) + 4(13) + 8(14) + 10(11) + 9(15)}{6 + 4 + 8 + 10 + 9}$$

$$= \frac{72 + 52 + 112 + 110 + 135}{37} = \frac{481}{37}$$

$\therefore$ Edad promedio es 13.

5 Sean a y b dos números, si el producto de su media aritmética con su media armónica es igual al doble de su media geométrica; entonces el menor valor de "a + b" es:

Resolución:

Del enunciado: $\overline{MA} \times \overline{MH} = 2\overline{MG}$

$$\overline{MG}^2 = 2\overline{MG}$$

$$\overline{MG}^2 - 2\overline{MG} = 0$$

$$\overline{MG}(\overline{MG} - 2) = 0$$

$$\overline{MG} = 0 \;\vee\; \overline{MG} = 2$$

$$\sqrt{ab} = 2$$

$14 \Rightarrow 1 + 4 = 5$

$22 \Rightarrow 2 + 2 = 4$

$41 \Rightarrow 4 + 1 = 5$

$\therefore$ El menor valor de a + b es 4.

6 Si: $\frac{a+b}{5} = \frac{b+c}{10} = \frac{a+c}{8}$. Halla: $\frac{\overline{MA}(a+3b+2c)}{\overline{MA}(3a+2b+c)}$

Resolución:

De $\frac{a+b}{5} = \frac{b+c}{10} \Rightarrow 2a+2b = b+c$

$2a + b = c$ ...(I)

De $\frac{b+c}{10} = \frac{a+c}{8} \Rightarrow 4b+4c = 5a+5c$

$4b - 5a = c$ ...(II)

De (I) y (II): $2a + b = 4b - 5a$

$7a = 3b$

$\frac{a}{b} = \frac{3k}{7k} \Rightarrow a = 2(3k) + 7k$

$c = 13k$

$$\frac{\overline{MA}(a+3b+2c)}{\overline{MA}(3a+2b+c)} = \frac{\frac{3k+21k+26k}{3}}{\frac{9k+14k+13k}{3}} = \frac{50k}{36k}$$

$$\therefore \frac{\overline{MA}(a+3b+2c)}{\overline{MA}(3a+2b+c)} = \frac{25}{18}$$

7 El promedio armónico de 20 números diferentes es 18 y el promedio armónico de otros 30 números diferentes es 54. Halla el promedio armónico de los 50 números.

Resolución:

Sean los 20 números: $a_1; a_2; a_3; ...; a_{20}$

Por dato del problema:

$$\frac{20}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_{20}}} = 18$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_{20}} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$$

Sean los 30 números: $b_1; b_2; b_3; ...; b_{30}$

Por dato del problema:

$$\frac{30}{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+...+\frac{1}{b_{30}}} = 54$$

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+...+\frac{1}{b_{30}} = \frac{30}{54} = \frac{5}{9}$$

Luego:

$$\frac{50}{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_{20}}\right)+\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+...+\frac{1}{b_{30}}\right)}$$

$$= \frac{50}{\frac{10}{9}+\frac{5}{9}} = \frac{50}{\frac{15}{9}} = 30$$

8 ¿Cuál es el valor de "n" si el promedio geométrico de las "n" primeras potencias de 3 es 2187?

Resolución:

Sean las n potencias de 3: $3^1; 3^2; 3^3; ..., 3^n$

Por condición del problema:

$$\sqrt[n]{3^1 \times 3^2 \times 3^3 ... 3^n} = 2187$$

$$\sqrt[n]{3^{1+2+3+...+n}} = 2187 \Rightarrow \sqrt[n]{3^{\frac{n(n+1)}{2}}} = 3^7$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{n+1}{2}} = 3^7 \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 7 \Rightarrow n = 13$$

9 La edad promedio de "P" alumnos de un aula es de "k" años, ninguno de ellos es mayor de "M" años. ¿Cuál es la mínima edad que puede tener uno de ellos?

Resolución:

Sean las edades de los "P" alumnos: $a_1; a_2; a_3; ...; a_P$

Por dato del problema: $\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_P}{P} = k$

$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_P = Pk$

Sea a_1 la edad mínima.

Ninguno es mayor de M años, entonces:

$a_2 = a_3 = a_4 = ... = a_P = M$

Luego: $a_1 + \underbrace{M + M + M + ... + M}_{(P-1)} = Pk$

$a_1 + M(P-1) = Pk \Rightarrow a_1 = Pk - PM + M$

$\therefore a_1 = P(k - M) + M$

10 El promedio aritmético de 51 números enteros consecutivos es 75, halla dos números consecutivos que se debieron quitar para que el promedio aritmético de los números restantes sea 74.

Resolución:

Sean los 51 números consecutivos:

$x + 1, x + 2, x + 3, ..., x + 51$

Por dato del problema:

$$\frac{(x+1)+(x+2)+...+(x+51)}{51} = 75$$

$\Rightarrow (x+1)+(x+2)+...+(x+51) = 3825$

Sean los 2 números consecutivos: $a; a + 1$

$$\frac{(x+1)+(x+2)+...+(x+51)-(a+a+1)}{49} = 74$$

$\Rightarrow 3825 - (2a+1) = 3626 \Rightarrow 199 = 2a + 1$

$a = 99 \Rightarrow a + 1 = 100$

$\therefore$ Los números son 99 y 100.

Actividades de razonamiento

1. La media geométrica de 2 números es 18 y su media armónica es 14,4. ¿Cuál es su media aritmética?

A) 20 B) 22,5 C) 18,5 D) 22 E) 21

2. El producto de los tres promedios de dos números es 512. Si uno de los promedios es 6,4, halla el mayor de los tres promedios.

A) 7,2 B) 8,4 C) 9 D) 10,5 E) 10

3. El promedio de 15 números es 18; si de estos 15 números se anulan el 21 y 28, entonces el promedio de los números restantes es:

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 20

4. El promedio aritmético de 60 números es 48; si de los 60 números se anulan el 75 y 79, entonces el promedio de los restantes es:

A) 45 B) 48 C) 50 D) 47 E) 52

5. Halla el promedio de los siguientes números:
3; 5; 7, 9; ...; 21

A) 12 B) 13 C) 15 D) 14 E) 16

6. Halla el promedio de los siguientes números:

11; 15; 19; 23; ...; 75

A) 41 B) 43 C) 42 D) 45 E) 46

7. Los dos mayores promedios de 2 números son 4 y 5. Halla la $\overline{MH}$.

A) 3,2 B) 3,4 C) 3 D) 3,6 E) 3,8

8. Halla un número entero sabiendo que la media armónica de su mitad y su quinta parte es 16.

A) 28 B) 56 C) 14 D) 42 E) 65

9. La edad promedio de 5 jóvenes es 17 años. Si ninguno de ellos es menor de 15 años, ¿cuántos años tendrán como máximo dos de los jóvenes?

A) 18 B) 21 C) 20 D) 19 E) 17

10. La media aritmética de 3 números es 18. Si el mayor de los números es el doble del menor, y el intermedio es la media aritmética de los otros dos, el menor es:

A) 12 B) 18 C) 24 D) 16 E) 20

11. Si: $\overline{MG}(a; b) = 12$ y $\overline{MG}(a + b; b + 9) = 20$.
Siendo "a" y "b" enteros y "b" mayor que "a".
Calcula b – a.

A) 5 B) 4 C) 3 D) 6 E) 7

12. El siguiente cuadro corresponde a las edades de un grupo de alumnos de un colegio. Calcula la edad promedio por aula.

Edad	16	17	18	19	30
Número de alumnos	25	30	50	10	35

A) 20 B) 17 C) 19 D) 18 E) 21

13. El promedio aritmético de 5 números impares consecutivos es igual a:

I. El número intermedio.
II. La media aritmética del cuarto y quinto número.
III. La media aritmética de los extremos.
IV. La media aritmética del segundo y cuarto número.

Son verdaderas:

A) Solo I B) Solo III C) I, III y IV
D) III y IV E) I y III

14. El siguiente cuadro corresponde a los ingresos de un grupo de 20 familias de un barrio popular. Calcula el ingreso promedio por familia.

n.° de familias	Ingreso (S/.)
8	180
6	190
3	200
2	240
1	260

A) S/.163 B) S/.169 C) S/.194
D) S/.196 E) S/.189

Claves

1. B
2. E
3. C
4. D
5. A
6. B
7. A
8. B
9. C
10. A
11. E
12. D
13. C
14. D

Reto



"R" alumnos rindieron un examen. Después de la calificación, se vio que la nota promedio de los aprobados fue "A" y de los desaprobados fue "T". Si la nota promedio de los "R" alumnos fue "U", ¿cuántos aprobaron el curso?

Rpta.: $R\left(\frac{U - T}{A - T}\right)$

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. El promedio de 3 números es 20. Si la suma de los dos primeros es 39, ¿cuál es el tercer número?

A) 20　B) 24　C) 18　D) 25　E) 21

2. El promedio de 3 números consecutivos es 18, calcula el promedio de los tres números consecutivos siguientes.

A) 15　B) 21　C) 25　D) 28　E) 31

3. El promedio de 2 números pares consecutivos es 17, calcula el promedio de los dos números pares consecutivos siguientes.

A) 22　B) 28　C) 21　D) 26　E) 23

4. La media aritmética de 4 números es 31. Si la media aritmética de los dos primeros es 23, calcula el promedio de los dos últimos.

A) 38　B) 39　C) 42　D) 37　E) 41

5. Si la media geométrica de “a” y 12 es 6, halla a.

A) 2　B) 7　C) 5　D)6　E) 3

6. Si la media armónica de “b” y 24 es 16, halla “b”.

A) 12　B) 10　C) 14　D) 11　E) 8

7. El promedio de 3 números impares consecutivos es 15, calcula el promedio de los 4 números impares consecutivos siguientes.

A) 25　B) 18　C) 22　D) 24　E) 19

8. La media aritmética de 2 números es 9. Si se triplica el primero y el segundo se disminuye en 2 unidades, el nuevo promedio es 15. Calcula la diferencia de dichos números.

A) 6　B) 2　c) 10　D) 4　E) 8

9. Si: $A = \overline{MA}$ de 19 y 13
$B = \overline{MA}$ de 8 y 10
Calcula la $\overline{MG}$ de “A” y “B”.

A) 12　B) 14　c) 17　D) 10　E) 11

10. La media aritmética de dos números es 6. Si la relación de dichos números es de 1 a 2, halla el mayor de ellos.

A) 11　B) 12　C) 8　D) 16　E) 10

NIVEL 2

11. Halla el promedio:

$\underbrace{a; a; a; \ldots; a;}_{\text{“b” veces}}$　$\underbrace{b; b; b; \ldots; b}_{\text{“a” veces}}$

A) $2(a + b)$　B) $\frac{2ab}{a+b}$　C) $2ab$

D) $\frac{ab}{a+b}$　E) $\frac{ab}{a-b}$

12. Dos números están en la relación de 16 y 9. ¿En qué relación estarán su media aritmética y su media geométrica?

A) $\frac{24}{23}$ B) 18 C) $\frac{23}{21}$ D) $\frac{22}{19}$ E) $\frac{25}{24}$

13. El promedio de 20 números es 25; si se le agrega un número más el promedio sigue siendo 25. ¿Cuál es el nuevo número?

A) 30 B) 25 C) 27 D) 23 E) 28

14. Halla el mayor de dos números tales que su media aritmética sea 18,5 y su media geométrica sea 17,5.

A) $\frac{49}{2}$ B) $\frac{23}{5}$ C) 23 D) $\frac{25}{2}$ E) $\frac{43}{2}$

15. Si la $\overline{\text{MH}}$ de "a" y 4 es 6, y la $\overline{\text{MH}}$ de 8 y "b" es 12; calcula la $\overline{\text{MH}}$ de a y b.

A) 20 B) 12 C) 15 D) 18 E) 16

16. Calcula la $\overline{\text{MH}}$ de dos números cuya $\overline{\text{MA}}$ es 20 y su $\overline{\text{MG}}$ es 10.

A) 3 B) 5 C)7 D) 10 E) 8

17. Halla 2 números sabiendo que su media aritmética es 5 y su media armónica es 24/5.

A) 5 y 5 B) 7 y 3 C) 6 y 4 D) 9 y 1 E) 8 y 2

18. La $\overline{\text{MG}}$ de 2 números es 6 y la $\overline{\text{MG}}$ de otros 2 números es 4. Halla la $\overline{\text{MG}}$ de los 4 números.

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{5}$ D) $2\sqrt{6}$ E) $\sqrt{2}$

19. El promedio geométrico de 8 números es 8 y el promedio geométrico de otros 8 números es 4. ¿Cuál es el promedio geométrico de los 16 números?

A) $7\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $6\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{2}$

20. El promedio de 20 números es 25, si se le agrega un número más al promedio este aumenta en 1. ¿Cuál es el nuevo número?

A) 42 B) 50 C) 48 D) 44 E) 46

NIVEL 3

21. El promedio aritmético de 7 números es 26. Si la suma de los 5 primeros es 66, ¿cuál es el promedio aritmético de los otros dos números?

A) 58 B) 62 C) 71 D) 47 E) 40

22. El promedio aritmético de 20 números es 35 y el promedio de otros 30 números es 60. Halla el promedio aritmético de los 50 números.

A) 55 B) 52 C) 50 D) 35 E) 48

23. El doble de la $\overline{MA}$ de dos números es igual al cuadrado de su $\overline{MG}$ más 1. Si uno de los números es 120, ¿cuál es el otro?

A) 6 B) 1 C) 3 D) 4 E) 7

24. Sabiendo que la $\overline{MA}$ de dos números es a la $\overline{MG}$ de los mismos como 5 es a 3. Calcula la razón de los números.

A) 7 B) 5 C) 10 D) 9 E) 6

25. Para 2 números "a" y "b" se cumple que:

$\overline{MA} \times \overline{MH} = 196 \quad \wedge \quad \overline{MA} \times \overline{MG} = 245$

Halla (a + b).

A) 38 B) 43 C) 47 D) 35 E) 41

26. La media armónica de 4 números es 8. Si dos de los números son 9 y 18; halla la $\overline{MH}$ de los otros dos números.

A) 5 B) 6 C) 9 D) 10 E) 7

27. En un aula donde el número de hombres es al número de mujeres como 3 es a 5, se ha determinado que el promedio de las edades de los hombres es 17 y el de las mujeres 15. Determina el promedio de las edades de todo el aula.



A) 16,2 B) 15,75 C) 16,25 D) 16,5 E) 16

28. Si la media armónica del 20% y el 30% de un número entero es 19,2; halla dicho número.

A) 50 B) 70 C) 80 D) 90 E) 60

29. En un colegio el número de varones es el 75% del número de mujeres. La estatura promedio del total de alumnos y de las mujeres es 1,57 m y 1,54 m respectivamente. Calcula la estatura promedio de los varones.



A) 1,60 m B) 1,62 m C) 1,65 m
D) 1,59 m E) 1,61 m

30. El promedio aritmético de 4 números naturales es 11 y cuando se, les agrupa de 3 en 3, dichos promedios aritmeticos son pares consecutivos. Halla el menor de los números.

A) 2 B) 4 C) 3 D) 1 E) 5

Claves

NIVEL 1	9. A	17. C	25. D
1. E	10. C	18. D	26. B
2. B	NIVEL 2	19. B	27. B
3. C	11. B	20. E	28. C
4. B	12. E	NIVEL 3	29. E
5. E	13. B	21. A	30. A
6. A	14. A	22. C	
7. C	15. E	23. B	
8. D	16. B	24. D	

UNIDAD 2



Las plantas usan las matemáticas para sobrevivir

Durante la noche, cuando la planta no puede utilizar la energía de la luz solar para convertir el dióxido de carbono en azúcares y almidón, debe regular sus reservas de este último para asegurar que duren hasta el amanecer.

Los experimentos, realizados por científicos del Centro John Innes, en Norwich (este de Inglaterra), muestran que para ajustar su consumo de almidón de manera tan precisa la planta debe realizar un cálculo matemático: una división aritmética.

Durante la noche, los mecanismos dentro de la hoja miden la cantidad de almidón. Y la información sobre el tiempo proviene de un reloj interno, similar al del reloj biológico del cuerpo humano.

Los investigadores sugirieron que el proceso está mediado por las concentraciones de dos tipos de moléculas, llamadas “S” para el almidón y “T” para el tiempo.

Si las moléculas de “S” estimulan la descomposición de almidón, mientras que las moléculas “T” evitan que esto ocurra, entonces la tasa de consumo de almidón (V) se establece por la relación de moléculas “S” a “T”. En otras palabras, “S” dividido entre “T”.

Matemática recreativa

La herencia del jeque

Un jeque árabe tenía tres hijos y les dejó, al morir, 17 camellos, con el mandato, expresó, de que habían de repartirlos sin matar ningún de ellos, y de la manera siguiente: el mayor recibirá la mitad, el segundo, recibirá la tercera parte, y el menor, la novena parte.

Los hijos del jeque, al querer hacer el reparto, se dieron cuenta de que para poder cumplir la voluntad de su padre no había más remedio que descuartizar algunos camellos.

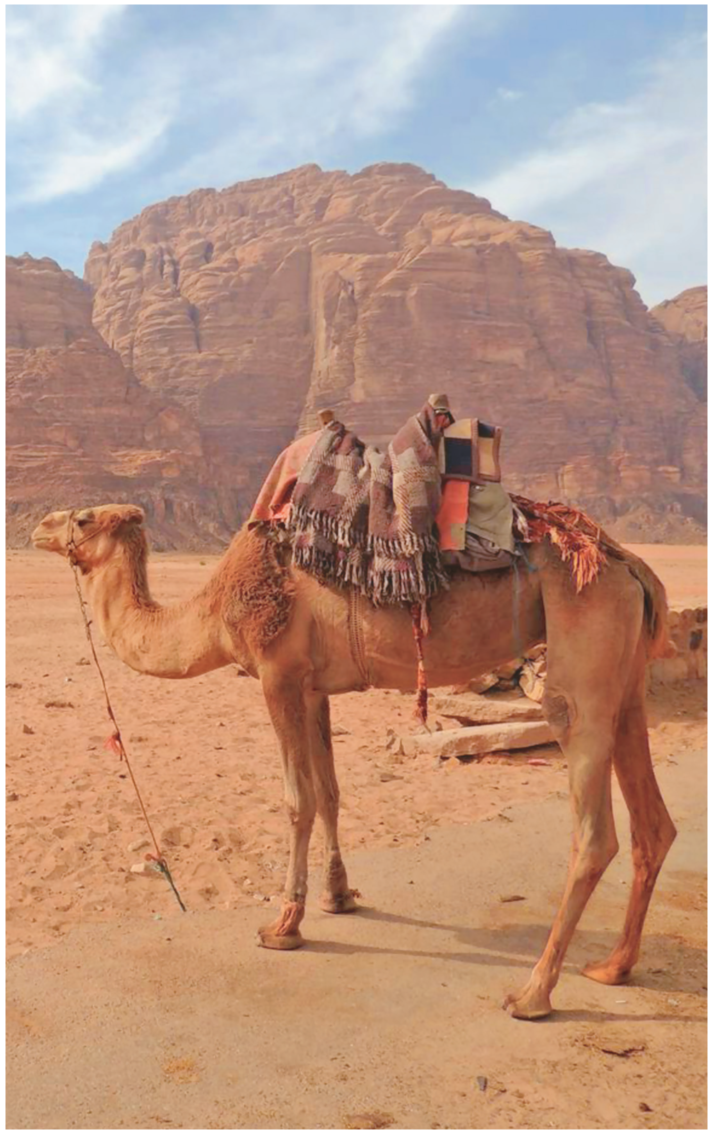
Acudieron al cadí, y este les pidió un día para pensarlo. Pasado ese día, acudió el cadí con un camello suyo y lo unió al grupo de los 17 camellos, y propuso que se procediera a cumplir la voluntad del jeque sobre esta herencia aumentada. Así, el mayor tomó 9 camellos; el segundo, 6, y el menor, 2.

Al terminar el reparto el cadí volvió a llevarse su camello y dejó a los tres hermanos contentos.

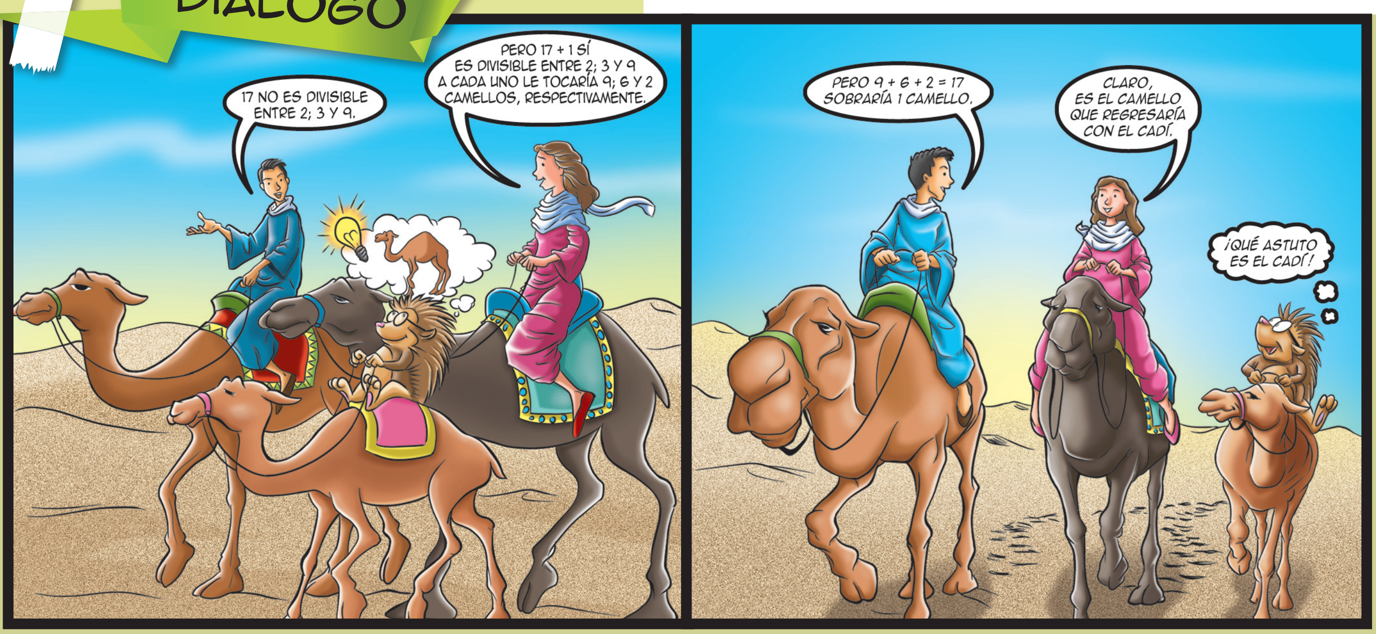
Explicamos la solución dada por el cadí:

17 + 1 = 18 camellos
18/2 = 9 del hijo mayor
18/3 = 6 del segundo hijo
18/9 = 2 del hijo menor

Esto suma 17 camellos y uno del cadí son 18.



DIÁLOGO



Operadores matemáticos

Atención

Los operadores que se muestran en el cuadro adjunto (+; –; x; ÷; log; etc.) son la base para crear nuevas operaciones de diferentes reglas de definición.



Recuerda

El nombre que se le da a los operadores arbitrarios es según el símbolo o figura a la que representan.



Nota

La ley de definición nos indica la secuencia de operaciones básicas que se deben realizar con los componentes que se operan.

OPERACIÓN MATEMÁTICA

Es un procedimiento que consiste en transformar una o más cantidades en otra llamada resultado, sujeto a ciertas normas y convenciones previamente definidas.

OPERADOR MATEMÁTICO

Es aquel símbolo que representa a una operación matemática.

Operadores matemáticos convencionales

Operación matemática	Operador matemático
Adición	$+$
Sustracción	$-$
Multiplicación	$\times$
División	$\div$
Radicación	$\sqrt{}$
Logaritmación	Log
Sumatoria	$\sum$
Productoria	$\prod$

Operadores matemáticos arbitrarios

$*$	Operador asterisco
#	Operador grilla
$\triangle$	Operador triángulo
∇	Operador nabla
$\square$	Operador cuadrado
▭	Operador rectángulo
$\bigcirc$	Operador círculo
@	Operador arroba

Ejemplo:

Sabiendo que: $m @ n = m^2 + 3n$

Halla: 9 @ 12

Resolución:

$$\underbrace{m @ n = \overbrace{}^{}}\ m @ n = \underbrace{m^2 + 3n,}_{\text{"Ley de definición"}}$$

@ → Operador arroba

m → 1.ª componente

n → 2.ª componente

Piden: $9 @ 12 = (9)^2 + 3(12)$

$= 81 + 36$

$= 117$

Problemas resueltos

1 Si: $\boxed{a \mid b \mid c} = \dfrac{a+b}{c}$

Halla x en:

$\boxed{2 \mid 6 \mid x} = \boxed{0 \mid x \mid 2}$; $x > 0$

Resolución:

$$\boxed{2 \mid 6 \mid x} = \boxed{0 \mid x \mid 2}$$
$$\frac{2+6}{x} = \frac{x}{2}$$
$$\frac{8}{x} = \frac{x}{2}$$
$$x^2 = 16;\ x > 0$$
$$x = 4$$

2 Si: $a * b = ab + 2(a \square b)$, y

$a \square b = a^2 - b^2$

Halla: $3 * 2$

Resolución:

$$\begin{aligned} 3 * 2 &= 3 . 2 + 2(3 \square 2) \\ &= 6 + 2(3^2 - 2^2) \\ &= 6 + 2(5) \\ &= 16 \end{aligned}$$

3 Si: $\textcircled{a} = a(a+1)$

Halla x en: $\textcircled{\textcircled{x+2}} = 156$

Resolución:

$$\begin{aligned} \textcircled{\textcircled{x+2}} &= 156 \\ \textcircled{\textcircled{x+2}} &= 12(13) \\ \textcircled{x+2} &= 12 \\ \textcircled{x+2} &= 3(4) \\ x+2 &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

4 Si: $\triangle_{a} = a^2 - 4$

$\boxed{b} = b(b-4)$

Halla x en: $\triangle_{\boxed{x}} = 21$; $\boxed{x} > 0$

Resolución:

$$\triangle_{\boxed{x}} = 21$$
$$\boxed{x}^2 - 4 = 21 \Rightarrow \boxed{x}^2 = 25$$
$$\therefore \boxed{x} = 5;\ \boxed{x} > 0$$
$$\boxed{x} = x(x-4) = 5(5-4)$$
$$x = 5$$

5 Si $\textcircled{a} = 3\,\boxed{a-1} + 8$

$\boxed{b} = 5b - 4$

Halla x en: $\boxed{x} = \textcircled{5}$

Resolución:

$$\boxed{x} = \textcircled{5}$$
$$5x - 4 = 3\,\boxed{5-1} + 8$$
$$5x - 4 = 3\,\boxed{4} + 8$$
$$5x - 4 = 3(5(4) - 4) + 8$$
$$5x - 4 = 56$$
$$5x = 60$$
$$\therefore\ x = 12$$

6 Si: $a\ \alpha\ b = b^a$

Resuelve $(x+2)\ \alpha\ 27 = (x-5)\ \alpha\ 81$

Resolución:

$$(x+2)\ \alpha\ 27 = (x-5)\ \alpha\ 81$$
$$27^{x+2} = 81^{x-5}$$
$$3^{3(x+2)} = 3^{4(x-5)}$$
$$3^{3x+6} = 3^{4x-20}$$
$$\Rightarrow 3x + 6 = 4x - 20$$
$$x = 26$$

7 Siendo:

$m \phi n = \dfrac{m+n}{m-n}$; $m \Delta n = \dfrac{mn}{m-n}$

Halla el valor de: $(5 \phi 3) \Delta (6 \Delta 2)$

Resolución:

$5 \phi 3 = \dfrac{5+3}{5-3} = \dfrac{8}{2} = 4$

$6 \Delta 2 = \dfrac{6 \times 2}{6-2} = \dfrac{12}{4} = 3$

Reemplazando:

$(5 \phi 3) \Delta (6 \Delta 2)$

$4 \Delta 3$

$\dfrac{4 \times 3}{4-3} = \dfrac{12}{1} = 12$

8 Si: $a \uparrow b = \sqrt{\dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2}}$

$m \downarrow n = \dfrac{m-n}{3}$. Halla el valor de:

$E = [(7 \uparrow 11) \uparrow (24 \downarrow 9)]^{(30 \uparrow 20)}$

Resolución:

$(7 \uparrow 11) = \sqrt{\dfrac{7}{2} + \dfrac{11}{2}} = \sqrt{9} = 3$

$(24 \downarrow 9) = \dfrac{24-9}{3} = \dfrac{15}{3} = 5$

$(30 \uparrow 20) = \sqrt{\dfrac{30}{2} + \dfrac{20}{2}} = \sqrt{25} = 5$

Reemplazando:

$E = [3 \uparrow 5]^5$

$E = \left[\sqrt{\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}}\right]^5$

$E = \sqrt{4}^5$

$E = 2^5$

$E = 32$

9 Si:

$a \,\theta\, b = \begin{cases} 2a + b; a \geq b \\ a + b; a < b \end{cases}$

Halla el valor de: $(2 \,\theta\, 1) \,\theta\, (2 \,\theta\, 3)$

Resolución:

$(2 \,\theta\, 1) = 2(2) + 1 = 5$

$(2 \,\theta\, 3) = 2 + 3 = 5$

Reemplazando:

$(2 \,\theta\, 1) \,\theta\, (2 \,\theta\, 3)$

$5 \,\theta\, 5$

$2(5) + 5$

$10 + 5$

15

10 Se define:

$ⓐ = \begin{cases} \dfrac{a^2+2}{2}; \text{si "a" es par} \\ \dfrac{a^2-1}{2}; \text{si "a" es impar} \end{cases}$

Calcula: ⑦ + ⑩ + ③ − ⑧

Resolución:

$⑦ = \dfrac{7^2 - 1}{2} = \dfrac{48}{2} = 24$

$⑩ = \dfrac{10^2 + 2}{2} = \dfrac{102}{2} = 51$

$③ = \dfrac{3^2 - 1}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

$⑧ = \dfrac{8^2 + 2}{2} = \dfrac{66}{2} = 33$

Reemplazando:

⑦ + ⑩ + ③ − ⑧

$\underbrace{24 + 51 + 4 - 33}_{46}$

Actividades de razonamiento

1. Si

$$\begin{array}{cc} & \boxed{H} \\ \boxed{P} & \end{array} = \frac{P + H + 15}{2} \qquad \begin{array}{cc} & \boxed{x} \\ \boxed{3} & \end{array} = 14$$

Halla: $\begin{array}{cc} & \boxed{5} \\ \boxed{x^2} & \end{array}$

A) 60 B) 30 C) 20 D) 50 E) 40

2. Si $a * b = a - b$

$m \triangle n = \frac{m}{n} + 1$

Halla x en: $(4 * 5) \triangle x = \frac{5}{6}$

A) 5 B) 3 C) 2 D) 6 E) 4

3. Si: $\textcircled{B} = (B + 1)^2$

Halla A en:

$\textcircled{\textcircled{A}} = 100$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2} + 1$ C) $\sqrt{2} - 1$
D) 2 E) 1

4. Si $a \odot b = 4a + b$

Halla: $(2 \odot 3) \odot (5 \odot 1)$

A) 70 B) 55 C) 40 D) 60 E) 65

5. Si: $\# m = 2(m - 3)$

$*n = 3(n - 2)$

Halla x en: $\#(*x) = *(\# 5)$

A) 3 B) 4 C) 1 D) 5 E) 2

6. Sabiendo que: $a \# b = \frac{2ab}{a + b}$

Halla: $R = \frac{30 \# 20}{4 \# 12}$

A) 8 B) 12 C) 10 D) 4 E) 9

7. Si: $3a \triangledown 2b = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Halla: $k = 48 \triangledown 18$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 6 E) 1

8. Si $a \triangle b = 2a - b$

$p * q = 3p + q$

Halla el valor de: $A = \frac{(6 * 4)}{(8 \triangle 5)} + (2 \triangle 3)$

A) 3 B) 7 C) 8 D) 4 E) 5

9. Si: $(2a) * (3b) = 3a + 2b$

Halla: $P = (4 * 3) * (2 * 9)$

A) 20 B) 16 C) 22 D) 15 E) 18

10. Si: $\textcircled{x} = x + 3 \;\wedge\; \boxed{x} = 3 \cdot \textcircled{x} + 2$

Halla: $Q = \textcircled{2} + \boxed{1} + \boxed{\textcircled{3}}$

A) 19 B) 58 C) 48 D) 35 E) 29

11. Si:

$$a\%b = \begin{cases} a + b; \text{ si a es par} \\ a - b; \text{ si a es impar} \end{cases}$$

Calcula: $(2\%5)\%(7\%1)$

A) 2 B) 3 C) 5 D) 1 E) 4

12. Si en el conjunto de los números naturales se define el operador $\triangle$ por:

$$a \triangle b = \begin{cases} 3a - 2b \;;\; \text{si } a > b \\ 3b - 2a \;;\; \text{si } b \geq a \end{cases}$$

Calcula: $E = (3 \triangle 1) \triangle (1 \triangle 2)$

A) 10 B) 12 C) 13 D) 15 E) 14

13. Sabiendo que:

$$x \oplus y = \begin{cases} \dfrac{x}{x + y}; \text{ si: } x \cdot y \geq 0 \\ x \cdot y; \text{ si: } x \cdot y < 0 \end{cases}$$

Halla: $(2 \oplus -1) \oplus -4$

A) 1/3 B) –1/3 C) –2 D) 2/3 E) 2

14. Si se sabe que:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc;$$

Halla “x” en: $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

A) 15/2 B) 11/2 C) 10/2 D) 12/2 E) 13/2

Claves

1. A	5. B	9. E	13. A
2. D	6. D	10. C	14. E
3. C	7. E	11. D	
4. E	8. A	12. C	

Reto



Se define:

$$\boxed{z} = \begin{cases} 3z - 2 \;;\; \text{si } z \geq 0 \\ 2z + 1 \;;\; \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Halla “x” si además: $\boxed{x} + \boxed{-3} = \boxed{12 - \boxed{4}}$

Rpta.: 11/3

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Si se sabe que: a ♥ b = 2a – 3b.
   Calcula el valor de: (4 ♥ 3)(1 ♥ 2)

   A) 6 B) 8 C) 4
   D) 10 E) 2

2. Si: $a \theta b = b^2 + 2ab + a^2$
   Halla el valor de: $R = (2 \theta 3) \theta (-5)$

   A) 100 B) 200 C) 300
   D) 360 E) 400

3. Si:

   $$a \otimes b = \frac{(a+b)^3}{a^2 + 2ab + b^2}$$

   Halla: $10 \otimes 11$

   A) 19 B) 20 C) 21
   D) 10 E) 11

4. Si: #(a) = 4; $a \neq 0$
   Halla m en:

   $$m = \frac{\#(99) . \#(100)}{\#(\sqrt{3})}$$

   A) 6 B) 3 C) 4
   D) 2 E) 8

5. Si: a \$ b = 5a – 9b + 21, calcula:
   (4 \$ 5) \$ (9 \$ 7)

   A) –30 B) –26 C) –24
   D) –20 E) –18

6. Halla E, si se sabe que:

   $\boxed{a \mid b} = a^2 - b^2$

   $E = \boxed{2 \mid 1} + \boxed{4 \mid 2} + \boxed{1 \mid 0}$

   A) 16 B) 12 C) 14
   D) 10 E) 8

7. Se definen:
   $a * b = 3a - 4b$
   $a \blacktriangle b = a^2 - 2ab + 47$
   El valor de: $(5 * 3) \blacktriangle 10$ es:

   A) –2 B) –4 C) –1
   D) 0 E) 6

8. Si: $a * b = a^2 - b^2$, halla: $401 * 400$

   A) 800 B) 1600 C) 401
   D) 400 E) 801

9. Si: $a * b = (2a + b)b$.
Calcula el valor de x en la expresión: $(x * 3) = 27$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

10. Si: $(x - 3)\ \%\ (2y) = y(x + 1)$, halla el valor de: $7\ \%\ 8$

A) 40 B) 44 C) 48
D) 36 E) 32

11. Si: $x@y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2 + y^2}$

Halla: $R = \dfrac{\sqrt{6}\ @\ \sqrt{10}}{\sqrt{3}\ @\ \sqrt{1}}$

A) 6 B) 7 C) 8
D) 10 E) 64

12. Si: $c * y = c - y$
Calcula: $[(4 * 3) * (12 * 13)] * [8 * (6 * 4)]$

A) 9 B) 14 C) –4
D) 22 E) 26

NIVEL 2

13. Si se sabe que:
$a\ \$\ b = 2ab - 13$
$a\ \%\ b = 45 - 3ab$
Calcula: $(4\ \$\ 3)\ \%\ (1\ \$\ 7)$

A) 12 B) 10 C) 8
D) 9 E) 15

14. Sabiendo que: $a * (a + b) = ab$
Halla x en: $5 * x = 15$

A) 2 B) 3 C) 8
D) 5 E) 0

15. Si: $3a^2 \bullet \sqrt{b} = \dfrac{a.b}{2}$
Halla: $27 \bullet 8$

A) 96 B) 100 C) 104
D) 108 E) 112

16. Se define:
$a \blacklozenge b = a^{b+1} - b^{a-1}$
Calcula el valor e:
$M = 6 \blacklozenge 2$

A) 28 B) 76 C) 88 D) 108 E) 128

17. Si: $a * b = a + 4b - 3ab$; halla el valor de x en:
$x * 2 = 3$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 1

18. Si: $a \square b = \dfrac{a+b}{b}$
Halla el valor de x en: $21 \square 3 = x \square 5$

a) 25 B) 30 C) 35
D) 40 E) 45

19. Siendo que: $\textcircled{n} = n^2 + 4$ y $\boxed{n} = 2n - 1$
Calcula: $\textcircled{\textcircled{1}} - \boxed{\boxed{3}}$

A) 16 B) 20 C) 24
D) 28 E) 30

20. Si: $m \,@\, n = (m - n)^2 + 1$
Calcula el valor de:
$E = (9 \,@\, 3)^2 - 1$

A) 1369 B) 1368 C) 1370
D) 1390 E) 1380

21. Si: $m \oplus n = 2m + n$, halla el valor de x en:
$(2x + 4) \oplus 2 = 4 \oplus 10$

A) 8 B) –2 C) 0
D) 2 E) 4

22. Si: $(x + 1) \ominus (y - 1) = x + y$
Halla: $K = ((5 \ominus 3) \ominus (4 \ominus 2))^{(1 \ominus 1)}$

A) 194 B) 196 C) 198
D) 200 E) 206

23. Si: $a \odot b = \begin{cases} a^2 + b; & a > b \\ a + b^2; & a \leq b \end{cases}$
Halla: $(1 \odot 3) + (4 \odot 2)$

A) 12 B) 22 C) 180
D) 118 E) 334

24. Si: $D \rightarrow E = b^2 - 4ac$
$b = D + E$
$a = E - D$
$c = b - a$
Halla: $(1 \rightarrow 2) \rightarrow 3$

A) –1 B) 3 C) 2
D) 1 E) 0

25) Si: $a * b = 3a + 2b + b^2$
$a \# b = a^2 - ab + b^2$
Halla x en: $2 \# x = 4 * x$

A) 4 B) 2 C) –4
D) 18 E) –2

NIVEL 3

26) Si: $\&x = x^2 - 1$
$\&(\odot x) = x(x + 2)$
Halla: $\odot 3 + \&2$

A) 5 B) 6 C) 7
D) 9 E) 4

27) Se define la operación:

$$\triangle x = x(x+1)$$

Además:

$$\triangle\!\!\triangle\, x+2 = 156$$

Calcula:

$$\triangle\, x^2-5$$

A) –12 B) 10 C) –10
D) 12 E) 11

28) Si: $\sqrt[q]{p}\ \alpha\ \sqrt[p]{q} = 2q - 3p$
Calcula el valor de:
$R = \sqrt[24]{256}\ \alpha\ \sqrt[12]{729}$

A) 2 B) 4 C) 3 D) 0 E) 1

29) Si: $a^2 \phi\, b^3 = m \Leftrightarrow a = bm$
Halla el valor de x en: $16 \phi\, x^3 = x;\ x > 0$

A) 0 B) 1 C) 2
D) –1 E) 3

30) Si: $f(x) = x \,.\, f(x + 1)$
Halla:

$$M = \frac{f(f(f(5)))}{f(f(f(5)) + 1).f(f(5) + 1).f(5 + 1)}$$

A) 1 B) 6! C) 5
D) 6 E) $\frac{1}{6}$

31) Calcula el valor de:

$$\triangle 3 + \boxed{2}$$

Si: $\boxed{x} = (x - 1)(x + 1)$

$\boxed{\triangle y} = y^2 + 2y$

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 9

32) Si: $a\underline{|b} = N \Leftrightarrow a = b^N$

Halla x en: $2^{x+1}\underline{|3} = 2(4^{x-1}\underline{|9})$

A) 1 B) 2 C) 3
D) –2 E) –3

33. Si sabemos que:
$a^* = 2a + 1$, si a es par
$a^* = 2a + 2$, si a es impar
Halla: $(2^*)^*$

A) 2 B) 4 C) 12
D) 6 E) 10

34. Si: $a^{\#} = \dfrac{a+2}{a-1}$; $b^{\triangle} = \dfrac{b^2-1}{b}$; $c^{\square} = (c-1)^2$

Halla: $((2^{\#})^{\triangle})^{\square}$

A) $\dfrac{95}{3}$ B) $\dfrac{121}{16}$ C) $\dfrac{81}{16}$
D) $\dfrac{105}{14}$ E) $\dfrac{93}{17}$

35. Si: $[x] = n \Leftrightarrow n < x < n + 1$; $\forall\ n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$.
Halla: $[2,5] + [-2,5]$

A) 1 B) 0 C) –1 D) 2 E) –2

36. Si:
$$a * b = \begin{cases} a + 1; \text{ si } a \geq b \\ b + 1; \text{ si } a < b \end{cases}$$
Calcula: $[(4 * 3) * (12 * 13)] * [8 * (6 * 4)]$

A) 9 B) 14 C) 16 D) 22 E) 26

37. Se define:
$$a * b = \begin{cases} a^2 - b^2; \text{ si a es par} \\ a^2 + b^2; \text{ si a es impar} \end{cases}$$
Calcula: $(2 * 1) * (1 * 2)$

A) 25 B) 30 C) 32
D) 34 E) 36

38. Si se sabe que:
$$a * b = \begin{cases} (-1)^a; \text{ si a es par} \\ (-1)^b; \text{ si a es impar} \end{cases}$$
Calcula: $(8 * 9) + (5 * 6)$

A) 0 B) 1 C) –1
D) 2 E) –2

Claves

NIVEL 1	11. E	21. D	31. D
1. C	12. C	22. B	32. C
2. E	NIVEL 2	23. B	33. C
3. C	13. A	24. E	34. B
4. C	14. C	25. E	35. C
5. B	15. A	NIVEL 3	36. C
6. A	16. C	26. C	37. D
7. B	17. E	27. D	38. D
8. E	18. C	28. D	
9. A	19. B	29. C	
10. B	20. C	30. C	

Conteo de figuras

El conteo de figuras puede realizarse de dos maneras:



Importante

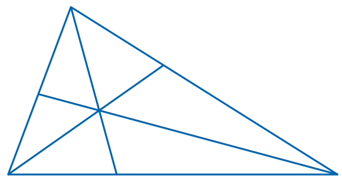
Mediante este método se asignan a cada una de las figuras interiores una letra o número.

Luego se realiza el conteo indicando la figura pedida que tenga un número (letra), dos números (letra), y así sucesivamente.

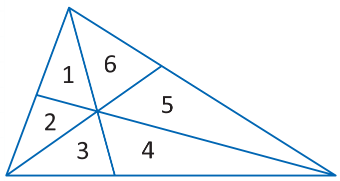
POR CONTEO DIRECTO

Ejemplos:

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?

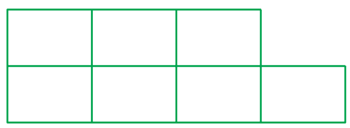


Resolución:



Con 1 número:	1; 2; 3; 4; 5; 6	6
Con 2 números:	12; 34; 56	3
Con 3 números:	123; 234; 345; 456; 561; 612	6
Con 6 números:	123456	1
		16

¿Cuántos cuadriláteros hay en la siguiente figura?

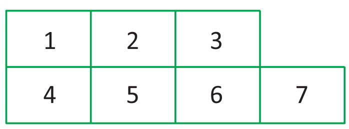


Recuerda

Este método es el más adecuado para figuras irregulares o figuras asimétricas, es decir, que no guardan cierta regularidad en sus partes.



Resolución:



Con 1 número:	1; 2; 3; 4; 5; 6; 7	7
Con 2 números:	12; 23; 45; 56; 67; 14; 25; 36	8
Con 3 números:	123; 456; 567	3
Con 4 números:	1245; 2356, 4567	3
Con 6 números:	123456	1
		22

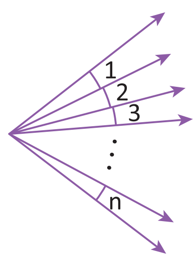
POR INDUCCIÓN

Número de segmentos



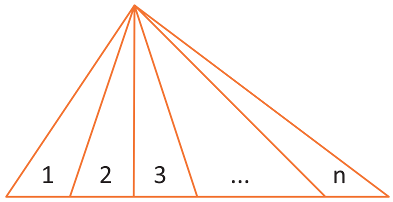
$$\text{n.° de segmentos} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Número de ángulos



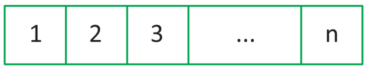
$$\text{n.° de ángulos} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Número de triángulos

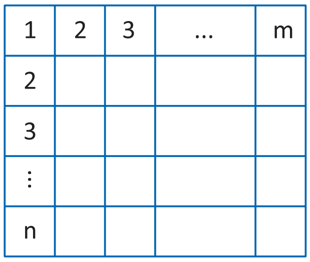


$$\text{n.° de triángulos} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Número de cuadriláteros



$$\text{n.° de cuadriláteros} = \frac{n(n+1)}{2}$$



$$\text{n.° de cuadriláteros} = \frac{m(m+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}$$



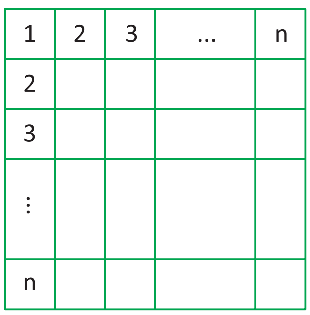
Importante

n.° de figuras geométricas $= \frac{n(n+1)}{2}$

Esta fórmula se aplica en los siguientes casos:

- Segmentos
- Ángulos
- Triángulos
- Cuadriláteros
- Hexágonos
- Octágonos

Número de cuadrados

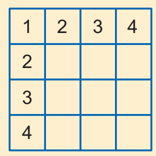


$$\text{n.° de cuadrados} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

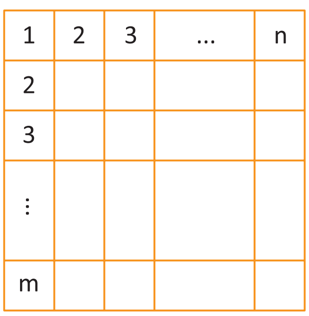


Recuerda

¿Cuántos cuadrados hay en la figura?

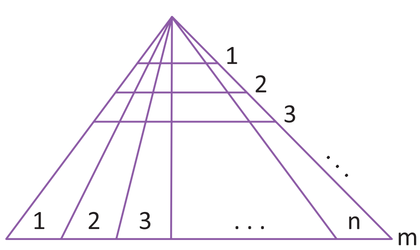


$$\text{n.°}_{\square} = \frac{4(4+1)(2 \cdot 4+1)}{6}$$
$$= 30$$



$$\text{n.° de cuadrados} = m \cdot n + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + \ldots$$

Número total de triángulos

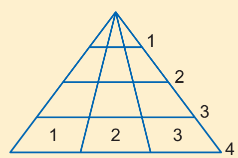


$$\text{n.° total de triángulos} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \cdot m$$



Atención

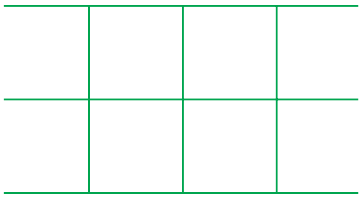
¿Cuántos triángulos hay en total?



$$\text{n.°}_{\triangle} = \left(\frac{3 \times 4}{2}\right) \times 4 = 24$$

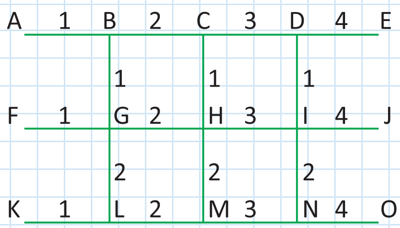
Problemas resueltos

1 ¿Cuántos segmentos se pueden contar en la figura?



Resolución:

Asignamos letras a cada punto y números a cada segmento.



Número de segmentos AE $= \frac{4(5)}{2} = 10$

Número de segmentos FJ $= \frac{4(5)}{2} = 10$

Número de segmentos KO $= \frac{4(5)}{2} = 10$

Número de segmentos BL $= \frac{2(3)}{2} = 3$

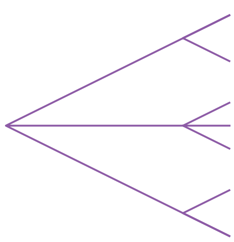
Número de segmentos CM $= \frac{2(3)}{2} = 3$

Número de segmentos DN $= \frac{2(3)}{2} = 3$

$\therefore$ Número total de segmentos

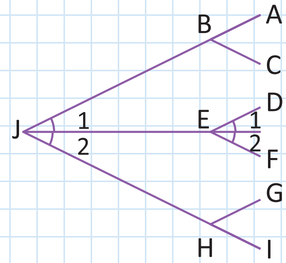
$= 3(10) + 3(3) = 39$

2 ¿Cuántos ángulos agudos presenta la siguiente figura?



Resolución:

Asignamos una letra a cada punto y un número a cada ángulo simple.



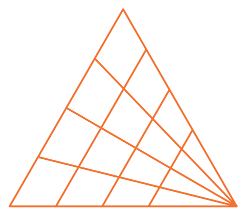
Número de ángulos en DEF $= \frac{2(3)}{2} = 3$

Número de ángulos en AJI $= \frac{2(3)}{2} = 3$

Número de ángulos simples: $\hat{ABC}$; $\hat{GHI} = 2$

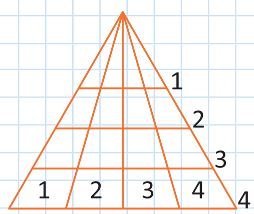
$\therefore$ Número total de ángulos $= 3 + 3 + 2 = 8$

3 Halla el número total de triángulos en la figura.



Resolución:

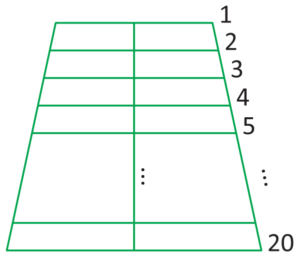
Giramos la figura, para luego aplicar la fórmula.



$\therefore$ Número de triángulos:

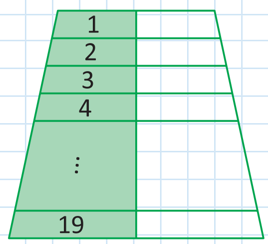
$\left(\frac{4 \times 5}{2}\right) \times 4 = 10 \times 4 = 40$

4 ¿Cuántos trapecios se pueden contar en la siguiente figura?



Resolución:

Asignamos a cada trapecio simple un número para aplicar fórmula.



Se observa que la cantidad total de trapecios es igual a calcular la cantidad de trapecios de la parte sombreada, pero multiplicado por 3.

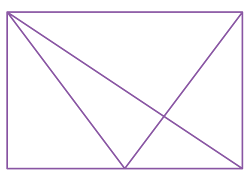
Luego:

$$\begin{array}{c}\text{Número total}\\ \text{de trapecios}\end{array} = 3\left(\begin{array}{c}\text{cantidad de trapecios}\\ \text{de la parte sombreada}\end{array}\right)$$

$$= 3\left(\frac{19 \times 20}{2}\right) = 570$$

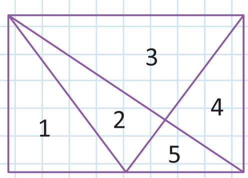
5 Indica V o F.

I. Hay 10 triángulos.
II. Hay 4 cuadriláteros.
III. Hay 4 pentágonos.



Resolución:

Asignando a cada región simple un número.



- Contando triángulos:

  Con 1 número: 1; 2; 3; 4; 5 ⟶ 5

  Con 2 números: 25; 34; 23; 45 ⟶ 4

  Con 3 números: 125 ⟶ 1

  Luego:

  Número de triángulos $= 5 + 4 + 1 = 10$ (V)

- Contando cuadriláteros:

  Con 2 números: 12 ⟶ 1

  Con 3 números: 123 ⟶ 1

  Con 4 números: 2345 ⟶ 1

  Con 5 números: 12345 ⟶ 1

  Luego:

  Número de cuadriláteros $= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ (V)

- Contando pentágonos:

  Con 3 números: 245; 345; 234 ⟶ 3

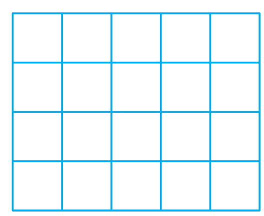
  Con 4 números: 1245; 1235 ⟶ 2

  Luego:

  Número de pentágonos $= 3 + 2 = 5$ (F)

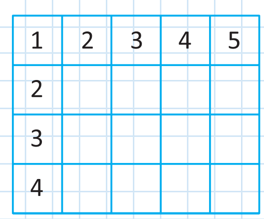
∴ VVF

6 ¿Cuántos cuadriláteros son cuadrados en la figura?



Resolución:

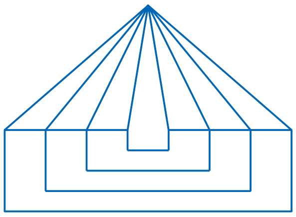
Asignamos números en la horizontal y en la vertical.



$$\begin{array}{c}\text{n.° de}\\ \text{cuadrados}\end{array} = 5 \times 4 + 4 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 1$$

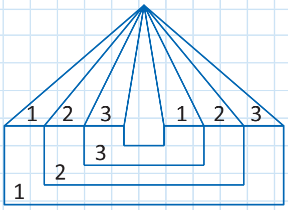
$$= 20 + 12 + 6 + 2 = 40$$

7 En la figura mostrada, el número de octágonos más el número de triángulos es:



Resolución:

Asignamos números a cada región triangular y octogonal, para aplicar la fórmula.



- Sea "O" el número de octógonos.

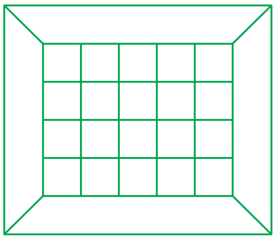
$$O = \frac{3(4)}{2} = 6$$

- Sea "T" el número de triángulos.

$$T = 2\left(\frac{3(4)}{2}\right) = 12$$

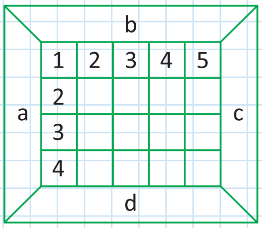
$\therefore$ "T + O" = 12 + 6 = 18

8 ¿Cuántos cuadriláteros hay en la figura que se presenta?



Resolución:

Asignamos números en la horizontal y vertical de las regiones cuadradas y letras en las regiones trapeciales.



n.° de cuadriláteros:

$$= \frac{4 \times 5}{2} \times \frac{5 \times 6}{2} = 150$$

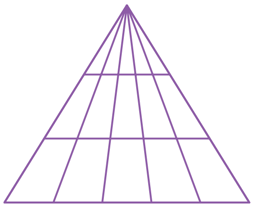
n.° de trapecios:

a; b; c; d $\longrightarrow$ 4

Además, la figura principal forma otro cuadrilátero.

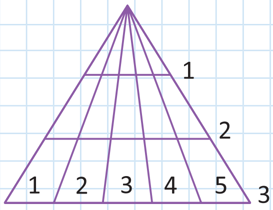
$\therefore$ n.° total de cuadriláteros = 150 + 4 + 1 = 155

9 Si: M = n.° total de triángulos.
N = n.° total de segmentos.
Halla (M + N) en la figura.



Resolución:

Asignamos números a las regiones inferiores y aplicamos fórmula.



$$\text{n.° de triángulos} = 3\left(\frac{5(6)}{2}\right) = 45$$

Luego: M = 45

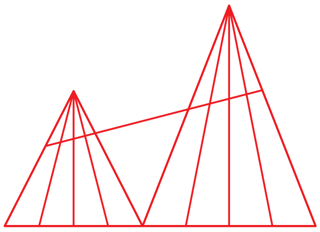
$$\text{n.° de segmentos} = 3\left(\frac{5(6)}{2}\right) + 6\left(\frac{3(4)}{2}\right)$$

$$= 45 + 36 = 81$$

Luego: N = 81

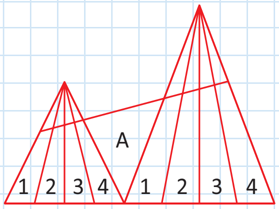
$\therefore$ M + N = 45 + 81 = 126

10 ¿Decir cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



Resolución:

Colocamos números a las regiones inferiores para aplicar la fórmula.



Número de triángulos

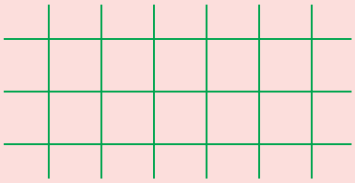
$$= 2\left(\frac{4(5)}{2} \times 2\right) = 40$$

Además "A" también es un triángulo.

$\therefore$ n.° total de triángulos = 40 + 1 = 41

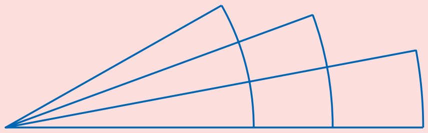
Actividades de razonamiento

1. ¿Cuántos segmentos hay?



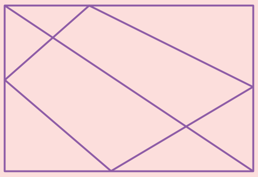
A) 138 B) 120 C) 130 D) 132 E) 144

2. Calcula el máximo número de sectores circulares en:



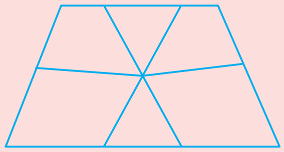
A) 8 B) 10 C) 12 D) 6 E) 4

3. ¿Cuántos cuadriláteros se pueden contar como máximo en la siguiente figura?



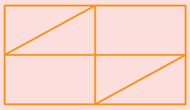
A) 15 B) 14 C) 18 D) 12 E) 10

4. Halla el máximo número de cuadriláteros en la figura.



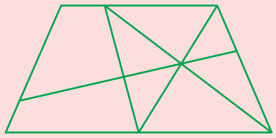
A) 11 B) 12 C) 13 D) 15 E) 14

5. ¿Cuántos cuadriláteros hay en la siguiente figura?



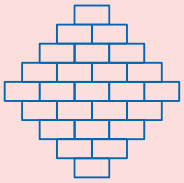
A) 10 B) 13 C) 21 D) 11 E) 15

6. ¿Cuántos triángulos se cuentan en total?



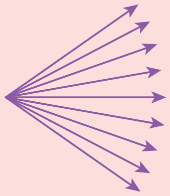
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

7. Halla el número total de cuadriláteros en la siguiente figura.



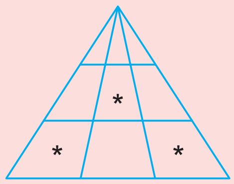
A) 55 B) 36 C) 30 D) 32 E) 49

8. ¿Cuántos ángulos agudos hay en la siguiente figura?



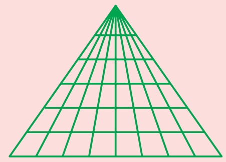
A) 42 B) 25 C) 48 D) 36 E) 30

9. ¿Cuántos triángulos con al menos un asterisco se cuentan en total en la figura?



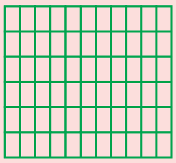
A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 15

10. Halla el número total de triángulos.



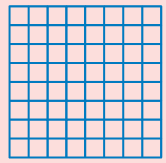
A) 124 B) 220 C) 216 D) 202 E) 221

11. Halla el número de cuadriláteros.



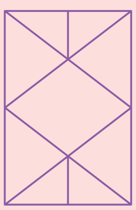
A) 1237 B) 1742 C) 1245 D) 1189 E) 1386

12. Halla el número total de cuadrados.



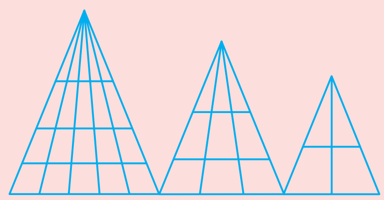
A) 215 B) 204 C) 206 D) 324 E) 102

13. De acuerdo a la figura mostrada:
T = n.° de triángulos.
C = n.° de cuadriláteros.
Calcula: "T + C"



A) 28 B) 30 C) 32 D) 34 E) 36

14. Halla el número total de triángulos en la siguiente figura:



A) 90 B) 82 C) 78 D) 84 E) 80

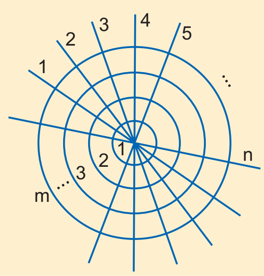
Claves

1. E
2. B
3. D
4. C
5. B
6. E
7. A
8. D
9. D
10. C
11. E
12. B
13. B
14. D

Reto



¿Cuántos semicírculos se cuentan como máximo en la figura mostrada?

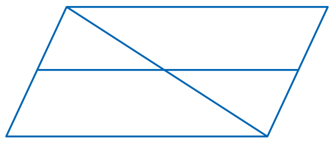


Rpta.: 2mn

Refuerza practicando

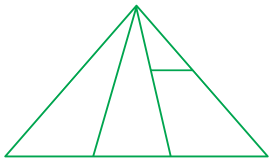
NIVEL 1

1. ¿Cuántos cuadriláteros hay?



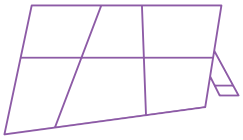
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

2. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



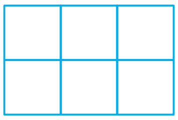
A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

3. Halla el número total de cuadriláteros en:



A) 21 B) 18 C) 9
D) 20 E) 23

4. ¿Cuántos cuadrados se pueden contar en total en la siguiente figura?



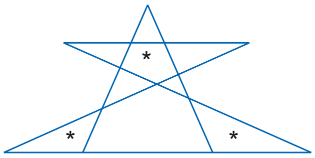
A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

5. ¿Cuántos paralelogramos hay en la siguiente figura?



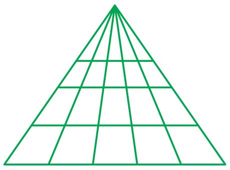
A) 50 B) 60 C) 30
D) 45 E) 20

6. ¿Cuántos triángulos tienen por lo menos un asterisco?



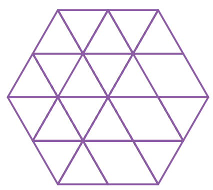
A) 6 B) 7 C) 9
D) 10 E) 11

7. Determina el número total de triángulos, en la siguiente figura:



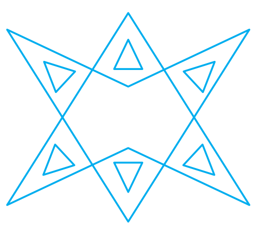
A) 60 B) 15 C) 30
D) 45 E) 50

8. ¿Cuántos triángulos hay, en total, en la siguiente figura?



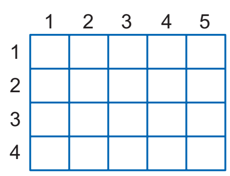
A) 38 B) 42 C) 29
D) 40 E) 34

9. Halla el número total de triángulos en:



A) 6 B) 10 C) 12
D) 14 E) 16

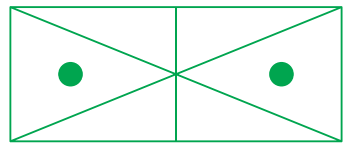
10. ¿Cuántos cuadriláteros hay en la figura?



A) 60 B) 220 C) 150
D) 90 E) 75

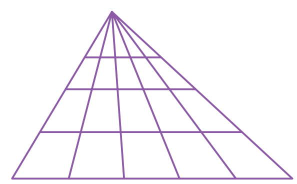
NIVEL 2

11. ¿Cuántos triángulos con un círculo existen en la figura?



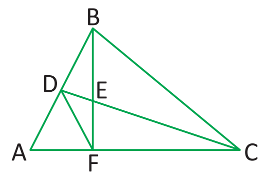
A) 4 B) 7 C) 6
D) 5 E) 8

12. Halla el total de triángulos que se observan:



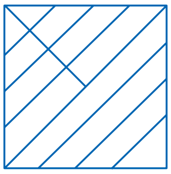
A) 20 B) 30 C) 40
D) 50 E) 60

13. La mitad del número de segmentos de recta que se representan en la figura es:



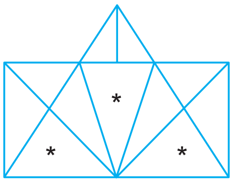
A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

14 Halla el número de triángulos en:



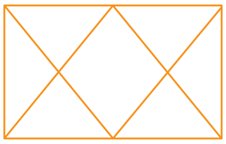
A) 13 B) 16 C) 17
D) 19 E) 18

15 ¿Cuántos triángulos se cuentan en total, tal que presenten al menos un asterisco en su interior?



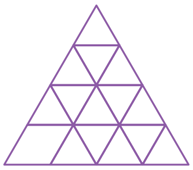
A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 11

16 ¿Cuántos triángulos y cuántos cuadriláteros hay en esta figura?



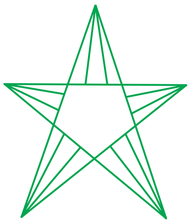
A) 10 ; 6 B) 12 ; 10 C) 12 ; 12
D) 10 ; 10 E) 12 ; 6

17 ¿Cuántos triángulos hay?



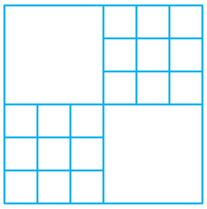
A) 18 B) 24 C) 25
D) 36 E) 43

18 ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



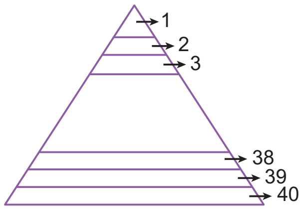
A) 31 B) 33 C) 35
D) 36 E) 32

19 ¿Cuántos cuadrados hay en la siguiente figura?



A) 15 B) 21 C) 25
D) 31 E) 37

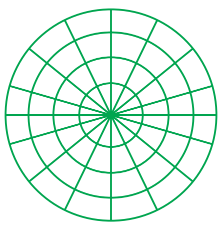
20 Halla el número de triángulos en:



A) 39 B) 88 C) 40
D) 89 E) 86

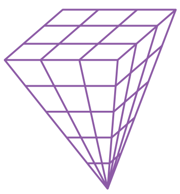
NIVEL 3

21 ¿Cuántos semicírculos hay en total?



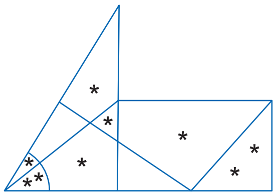
A) 64 B) 32 C) 48
D) 72 E) 60

22 Halla el número total de pirámides de base cuadrada.



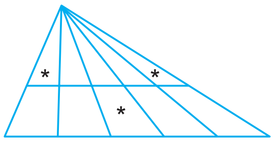
A) 45 B) 60 C) 65
D) 70 E) 50

23 ¿Cuántas regiones simples tienen un solo asterisco?



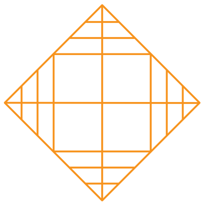
A) 4 B) 5 C) 7
D) 6 E) 9

24 ¿Cuántos triángulos tienen por lo menos un asterisco?



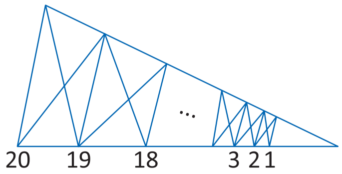
A) 22 B) 19 C) 23
D) 18 E) 21

25 El número de triángulos en la figura es:



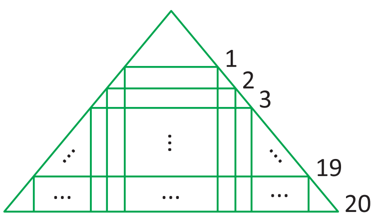
A) 40 B) 46 C) 48
D) 36 E) 44

(26) ¿Cuántos triángulos se pueden contar en la siguiente figura?



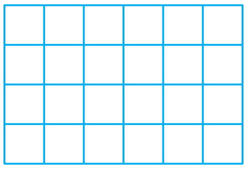
A) 210 B) 236 C) 246
D) 270 E) 196

(27) ¿Cuántos triángulos se pueden contar en la siguiente figura?



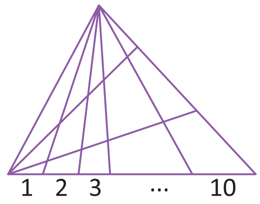
A) 500 B) 600 C) 400
D) 800 E) 900

(28) En la siguiente figura, ¿cuántos cuadriláteros hay? ¿Cuántos cuadrados hay? ¿Cuántos cuadriláteros que no son cuadrados se pueden observar?



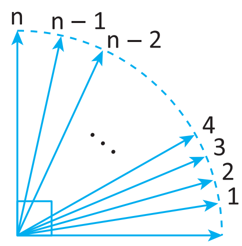
A) 190; 10; 120 B) 195; 20; 130
C) 200; 30; 140 D) 205; 40, 150
E) 210; 50; 160

(29) Halla el total de triángulos en:



A) 130 B) 106 C) 195
D) 160 E) 105

(30) ¿Cuántos ángulos agudos hay en la siguiente figura?



A) $\frac{(n+1)(n-2)}{2}$ B) $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$

C) $\frac{(n-2)(n+5)}{2}$ D) $\frac{(n-2)(n+6)}{4}$

E) $\frac{(n+8)(n-4)}{4}$

Claves

NIVEL 1			
1. C	9. B	17. C	25. E
2. A	10. C	18. C	26. C
3. A	NIVEL 2	19. D	27. C
4. D	11. C	20. C	28. E
5. D	12. E	NIVEL 3	29. C
6. E	13. C	21. A	30. B
7. A	14. B	22. D	
8. C	15. E	23. B	
	16. C	24. A	

Fracciones

DEFINICIÓN

Se denomina así a todos los números racionales que cumplen con las siguientes condiciones.

$$F = \frac{a}{b}$$

- a → Numerador
- b → Denominador

Donde:
a y $b \in \mathbb{Z}^+$
$a \neq \overset{\circ}{b}$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FRACCIÓN

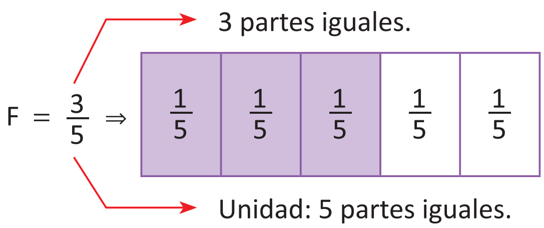
Para representar gráficamente una fracción, consideramos lo siguiente:

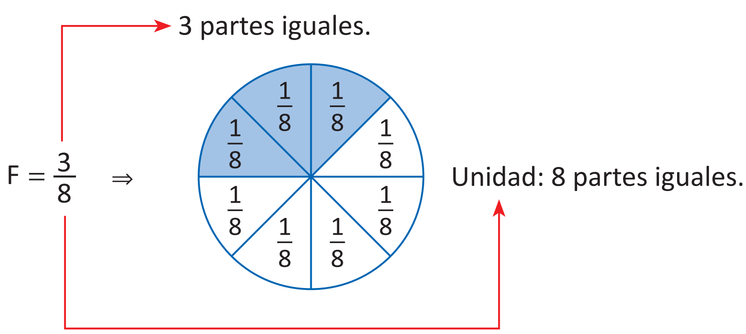
$$F = \frac{a}{b}$$

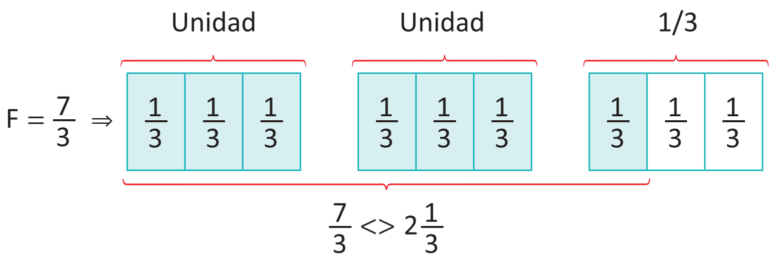
- a → Número de partes iguales que se consideran.
- b → Número de partes iguales en que se divide.

Unidad: es la totalidad de una cantidad referencial.

Ejemplos:







$$\frac{7}{3} <> 2\frac{1}{3}$$

Atención

¿Cuáles de las siguientes expresiones representan fracciones?

$\frac{2}{3}, \frac{-8}{5}, \frac{\pi}{4}, \frac{0}{3}, \frac{7}{5}, \frac{6}{-4}, \frac{4}{3}$

- Son fracciones:

$\frac{2}{3}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}$



Recuerda

Toda fracción ya sea propia o impropia se puede representar gráficamente.



PRINCIPALES TIPOS DE FRACCIONES

Fracción propia

Es aquella en la cual el numerador es menor que el denominador. Al hacer la división correspondiente, el resultado es menor que la unidad.

$$F = \frac{a}{b};\ a < b$$

Ejemplos: $\frac{4}{7}; \frac{2}{9}; \frac{1}{15}; \frac{7}{13}$

Fracción impropia

Es aquella en la cual el numerador es mayor que el denominador. Al hacer la división correspondiente, el resultado es mayor que la unidad.

$$F = \frac{a}{b};\ a > b$$

Ejemplos: $\frac{5}{3}; \frac{15}{11}; \frac{19}{7}; \frac{15}{2}$

Fracción reductible

Cuando el numerador y el denominador poseen factores en común (no son primos entre sí).

Ejemplos: $\frac{4}{8}; \frac{30}{24}; \frac{8}{100}; \frac{6}{16}$

Fracción irreductible

Cuando el numerador y el denominador no poseen factores en común (son primos entre sí).

Ejemplos: $\frac{3}{7}; \frac{9}{2}; \frac{5}{11}; \frac{23}{100}$

Fracciones homogéneas

Es un grupo de fracciones que tienen igual denominador.

Ejemplos: $\frac{3}{5}; \frac{7}{5}; \frac{21}{5}; \frac{101}{5}$

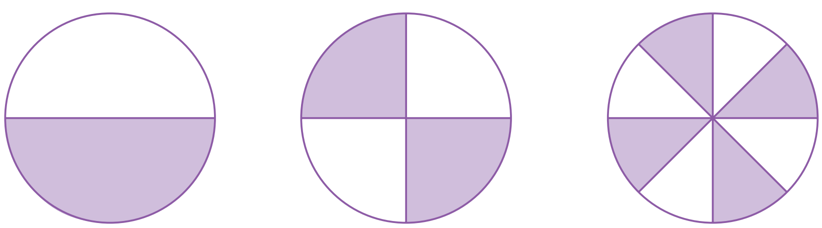
Fracciones heterogéneas

Es un conjunto de fracciones que tienen diferente denominador.

Ejemplos: $\frac{3}{5}; \frac{5}{9}; \frac{9}{2}; \frac{12}{7}$

FRACCIONES EQUIVALENTES

Son aquellos fracciones que utilizando términos diferentes expresan una misma parte de la unidad.



$$\frac{1}{2} \quad <> \quad \frac{2}{4} \quad <> \quad \frac{4}{8}$$

Importante

¿Cuál es la fracción propia e irreductible que resulta triplicada si se agrega a sus términos su denominador

Sea: $f = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a+b}{b+b} = \frac{3a}{b}$

$\frac{a+b}{2b} = \frac{3a}{b} \Rightarrow \begin{matrix} a+b = 6a \\ b = 5a \end{matrix}$

Luego: $\frac{a}{b} = \frac{1}{5}$





Atención

Halla una fracción equivalente a 21/9, si la diferencia de sus términos es 32.

$\frac{21}{9} = \frac{7}{3}$

$\Rightarrow$ Frac. equiv. $= \frac{7k}{3k}$

Luego: $7k - 3k = 32$

$4k = 32 \Rightarrow k = 8$

$\therefore$ Frac. equiv. $= \frac{7(8)}{3(8)} = \frac{56}{24}$

RELACIÓN PARTE-TODO

Viene a ser la comparación geométrica de una cantidad asumida como parte, respecto a otra cantidad asumida como un todo.

Luego:

$$F = \frac{a}{b}$$

- a → Lo que hace de parte ⇒ es, son, representa.
- b → Lo que hace de todo ⇒ de, del, respecto de.

Ejemplos:

1. ¿Qué parte de 120 es 24?

$$\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

2. ¿Qué parte de 90 es 20?

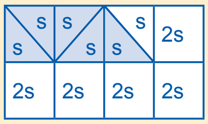
$$\frac{20}{90} = \frac{2}{9}$$

3. ¿Qué parte de 216 es 27?

$$\frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$

Atención

¿Qué fracción del total representa la parte sombreada?



$$\frac{5s}{16s} = \frac{5}{16}$$



FRACCIÓN GENERATRIZ

$$F = \frac{a}{b} = \text{Número decimal}$$

- Exacto
- Periódico puro
- Periódico mixto

Casos

I. Decimal exacto

$$0,9 = \frac{9}{10}$$

$$0,23 = \frac{23}{100}$$

$$0,876 = \frac{876}{1000}$$

$$5,73 = \frac{573}{100}$$

II. Decimal periódico puro

$$0,\hat{5} = \frac{5}{9}$$

$$0,\widehat{87} = \frac{87}{99}$$

$$0,\widehat{965} = \frac{965}{999}$$

$$3,\widehat{8270} = 3 + 0,\widehat{8270} = 3 + \frac{8270}{9999}$$

III. Decimal periódico mixto

$$0,2\hat{7} = \frac{27-2}{90}$$

$$0,57\widehat{64} = \frac{5764-57}{9900}$$

$$0,0\widehat{307} = \frac{307-3}{990}$$

Nota

Decimal exacto

$$0,\underbrace{ab...m}_{n\ cifras} = \frac{ab...m}{\underbrace{100...0}_{n\ cifras}}$$

Nota

Decimal periódico puro

$$0,\underbrace{\widehat{ab...m}}_{n\ cifras} = \frac{ab...m}{\underbrace{99...9}_{n\ cifras}}$$

Nota

Decimal periódico mixto

$$0,ab\widehat{cde} = \frac{abcde - ab}{999\,00}$$

Problemas resueltos

1 Reduce:

$$E = 2 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{2}{2 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{2}{1 - \cfrac{2}{3}}}}}$$

Resolución:

$$E = 2 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{2}{2 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{2}{1 - \cfrac{2}{3}}}}}$$

$$E = 2 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{2}{2 + \cfrac{1}{3 - 6}}}$$

$$E = 2 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{6}{5}} = 2 + \frac{5}{9}$$

$\therefore E = 23/9$

2 ¿Cuántas fracciones propias positivas menores que 9/11, cuyos términos son números enteros consecutivos, existen?

Resolución:

Sea $f = \frac{N}{N+1}$ la fracción propia cuyos términos son consecutivos según enunciado:

$$\frac{N}{N+1} < \frac{9}{11}$$

$11N < 9N + 9$

$2N < 9$

$N < 4{,}5$

Entonces: $N = 4; 3; 2$ y 1

Luego las fracciones serán: $\frac{4}{5}; \frac{3}{4}; \frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$

$\therefore$ Existen 4 fracciones propias menores que 9/11.

3 Dadas tres fracciones equivalentes a m/n, se observa que la suma de sus numeradores y denominadores son 77 y 165, respectivamente. Halla m/n.

Resolución:

Sean: $\frac{ma}{na}, \frac{mb}{nb}, \frac{mc}{nc}$ las fracciones equivalentes a m/n.

Por condición del problema:

$ma + mb + mc = 77$

$m(a + b + c) = 77$ ... (I)

$na + nb + nc = 165$

$n(a + b + c) = 165$ ... (II)

$(I) \div (II)$: $\frac{m(a+b+c)}{n(a+b+c)} = \frac{77}{165}$

$\frac{m}{n} = \frac{7 \times 11}{15 \times 11}$

$\therefore \frac{m}{m} = \frac{7}{15}$

4 Halla a + b si se cumple que:

$$\frac{a}{11} + \frac{b}{3} = 0{,}969696\ldots$$

Resolución:

Del dato: $\frac{a}{11} + \frac{b}{3} = 0{,}\widehat{96}$

$\frac{3a + 11b}{33} = \frac{96}{99}$

$3a + 11b = 32$

$\downarrow \quad \downarrow$

$7 \quad 1$

$\therefore a + b = 7 + 1 = 8$

5 Halla el valor de a si:

$$\frac{\overline{2a}}{55} = 0{,}a363636\ldots$$

Resolución:

Del dato: $\frac{\overline{2a}}{55} = 0{,}a\widehat{36}$

$\frac{20 + a}{55} = \frac{\overline{a36} - a}{990}$

$18(20 + a) = 100a + 36 - a$

$360 + 18a = 99a + 36$

$324 = 81a$

$\therefore a = 4$

6 Si: $\frac{N}{37} = 0,\overline{\left(\frac{a+1}{2}\right)(a+1)a}$; halla a.

Resolución:

Del dato: $\frac{N}{37} = \frac{\overline{\left(\frac{a+1}{2}\right)(a+1)a}}{999}$

$27 . N = \overline{\left(\frac{a+1}{2}\right)(a+1)a}$

a debe ser impar: $a = \{1; 3; 5; 7\}$

- Si: $a = 1 \Rightarrow 27 \times N = 121$
  No existe valor entero para N.
- Si: $a = 3 \Rightarrow 27 \times N = 243$
  $N = 9$
- Si: $a = 5 \Rightarrow 27 \times N = 365$
  No existe valor entero para N.
- Si: $a = 7 \Rightarrow 27 \times N = 487$
  No existe valor entero para N.
  $\therefore a = 3$

7 ¿Qué parte de $3^{\frac{1}{3}}$ es lo que le falta a 1/9 para ser igual a los 2/3 de 3/5?

Resolución:

Sea x lo que le falta a 1/9 para ser igual a los 2/3 de 3/5

Entonces: $\frac{1}{9} + x = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$

$\frac{1}{9} + x = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{13}{45}$

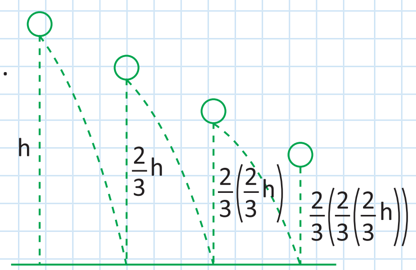
Veamos ahora qué parte de $3^{\frac{1}{3}}$ es 13/45.

$$\frac{\frac{13}{45}}{3\frac{1}{3}} = \frac{\frac{13}{45}}{\frac{10}{3}} = \frac{13}{150}$$

8 Una pelota cae de una altura. En cada rebote pierde de 1/3 de la altura anterior. Si después del tercer rebote se eleva 48 cm. ¿De qué altura inicial cayó?

Resolución:

Sea h la altura inicial.



Si pierde 1/3 de altura, entonces se eleva 2/3 de la altura anterior.

Luego en el 3.er rebote se eleva 48 cm:

$\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}h\right)\right) = 48$

$\therefore h = 162$ cm

9 ¿Cuántas fracciones equivalentes a $\frac{76}{133}$ existen tal que sean de la forma $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}$?

Resolución:

Según el enunciado:

$\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = \frac{76}{133}$

$\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = \frac{4}{7}$

$\frac{10a + b}{10b + a} = \frac{4}{7}$

$70a + 7b = 40b + 4b$

$66a = 33b$

$2a = b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1k}{2k}$

Si: $a = 1 \Rightarrow b = 2$
$a = 2 \Rightarrow b = 4$
$a = 3 \Rightarrow b = 6$
$a = 4 \Rightarrow b = 8$

Luego las fracciones serán:

$\frac{12}{21}; \frac{24}{42}; \frac{36}{63}; \frac{48}{84}$

$\therefore$ Existen 4 fracciones equivalentes.

10 Halla una fracción impropia cuya suma de términos sumado con el producto de los mismos es 76. Se sabe además que es equivalente a otra fracción que tiene por términos a las raíces de la ecuación: $x^2 - 8x + 15 = 0$

Resolución:

Sea $f = a/b$ la fracción impropia.

Dato:

$a + b + ab = 76 \quad ... (\alpha)$

Luego resolvemos la ecuación:

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$x \qquad -5$

$x \qquad -3$

$x = 5 \vee x = 3$

Según enunciado:

$\frac{a}{b} = \frac{5k}{3k}$

Reemplazando en α:

$5k + 3k + (5k)(3k) = 76$

$8k + 15k^2 = 76$

$15k^2 + 8k - 76 = 0$

$15k \qquad +38$

$k \qquad -2$

$k = -\frac{38}{15} \vee k = 2$ ✓

Entonces: $\frac{a}{b} = \frac{5(2)}{3(2)}$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{10}{6}$

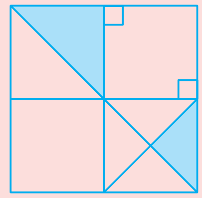
Actividades de razonamiento

1. Efectúa:

$$\left[1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-0,\widehat{3}}}\right]\div\frac{7}{5}$$

A) 5 B) 1 C) 2 D) 4 E) 3

2. ¿Qué parte del área total del cuadrado, representa el área de la región sombreada?



A) 3/8 B) 1/4 C) 1/3 D) 1/8 E) 3/16

3. Indica verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

I. En: $\frac{3x-y}{2}+\frac{4x+y}{2}=14$; $x=4$ ( )

II. Se cumple que: $0,3\widehat{3} > 0,\widehat{3}$ ( )

III. La generatriz de $0,4\widehat{2}$ es 19/45. ( )

A) VFF B) FFV C) FVV D) VFV E) VVV

4. En un depósito hay 18 litros de agua; si se extrae la sexta parte, ¿cuántos litros de agua debo volver a sacar para que solo quede la mitad de su capacidad?

A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 5

5. Pedro tiene 9 años y la edad de Pedro es $\frac{3}{2}$ de la de Enrique. ¿Qué edad tiene Enrique?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

6. ¿Qué parte de $\frac{2}{3}$ representa, lo que falta a $\frac{2}{7}$ para ser $\frac{2}{5}$?

A) $\frac{4}{35}$ B) $\frac{6}{35}$ C) $\frac{3}{35}$ D) $\frac{5}{35}$ E) $\frac{7}{9}$

7. ¿Cuánto le falta a $\frac{4}{11}$ para ser igual a los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{5}{7}$ de los $\frac{4}{9}$ de los $\frac{6}{11}$ de 7?

A) 37 B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{80}{99}$ E) $\frac{3}{8}$

8. Una persona inicialmente toma 16 metros de una varilla, luego toma los $\frac{2}{3}$ del resto y observa que ambas partes tienen la misma longitud. Halla entonces la longitud total de la varilla.

A) 36 m B) 40 m C) 38 m D) 35 m E) 42 m

9. Si a ambos términos de la fracción $\frac{1}{2}$ se le agrega su denominador. ¿En cuánto aumenta la fracción?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{6}{4}$

10. El denominador de una fracción excede al numerador en 8. Si el numerador aumentara en 2 y el denominador en 6, la fracción sería igual a $\frac{1}{3}$. Halla dicha fracción.

A) $\frac{4}{12}$ B) $\frac{7}{15}$ C) $\frac{13}{21}$ D) $\frac{11}{33}$ E) $\frac{3}{9}$

11. Los $\frac{5}{12}$ de la longitud de un muro equivale a los $\frac{2}{3}$ de la longitud de otro muro, siendo uno de ellos 27 metros mayor que el otro. ¿Cuál es la longitud de cada uno?

A) 72 y 45 m B) 38 y 48 m C) 74 y 40 m
D) 76 y 42 m E) 38 y 34 m

12. Los $\frac{3}{8}$ de un poste está pintado de azul, los $\frac{3}{5}$ del resto está pintado de negro y lo que queda que es 2 m de blanco, ¿cuál es la altura del poste?

A) 6 m B) 7 m C) 8 m D) 9 m E) 10 m

13. Alex tenía cierta cantidad de dinero, luego gastó $\frac{1}{2}$ de lo que no gastó. Después no regaló $\frac{1}{3}$ de lo que regaló. Finalmente pagó una deuda de S/.50 y le quedó S/.30. ¿Cuánto tenía al inicio?

A) S/.420 B) S/.450 C) S/.360
D) S/.400 E) S/.480

14. Lolo tiene un cierto número de huevos, al ser víctima de un robo, pierde $\frac{2}{9}$ del total menos 5 huevos. Al comprar 37 huevos, después, se percata que el número inicial de huevos queda incrementado en $\frac{1}{6}$. ¿Cuántos huevos le robaron?

A) 12 B) 15 C) 16 D) 19 E) 21

Claves

1. B	5. B	9. A	13. E
2. E	6. B	10. A	14. D
3. D	7. B	11. A	
4. B	8. B	12. C	

Reto



Elena sale del colegio y luego de dar 56 pasos hacia su casa sale María y decide alcanzarla. Si Elena da 9 pasos mientras que María da 7, pero 3 pasos de esta equivalen a 5 de Elena. ¿Cuántos pasos dará Elena para ser alcanzada por María?

Rpta.: 189

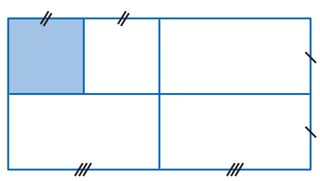
Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Efectúa: $Q = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2}}}$

A) 2/5 B) 2/9 C) 5/4 D) 4/3 E) 3/2

2. ¿Qué parte del área total del rectángulo, representa el área de la región sombreada?



A) 1/3 B) 1/4 C) 1/8 D) 2/7 E) 2/5

3. ¿Qué parte de $\frac{5}{21}$ de los $\frac{7}{9}$ de 63 es los $\frac{6}{13}$ de los $\frac{5}{8}$ de 52?

A) $\frac{7}{9}$ B) $\frac{9}{7}$ C) $\frac{6}{7}$ D) $\frac{8}{13}$ E) $\frac{8}{7}$

4. ¿Qué parte de $\frac{5}{9}$ representa lo que le sobra a $\frac{3}{5}$ para ser $\frac{1}{6}$?

A) $\frac{39}{50}$ B) $\frac{60}{39}$ C) $\frac{117}{50}$ D) $\frac{13}{50}$ E) $\frac{20}{35}$

5. ¿Cuántas sesentaicuatroavas partes, es mayor 0,9375 que 0,109375?

A) 40 B) 42 C) 50 D) 53 E) 70

6. ¿Cuántos cuartos hay en los $\frac{2}{5}$ de los $\frac{10}{4}$ de 30 unidades?

A) 30 B) 120 C) 480 D) 7,5 E) 10,6

7. ¿En cuántos cuarentaicincoavos es mayor $\frac{2}{3}$ que $\frac{5}{9}$?

A) 5 B) 1 C) 6 D) 9 E) 7

8. De un grupo de postulantes de una academia ingresan a la universidad 3/4 de los que no ingresan. ¿Qué fracción de los postulantes ingresan?

A) $\frac{4}{7}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

9. Efectúa: $L = 0,\overparen{142857} + 0,666...$

A) $\frac{17}{21}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{11}{17}$ D) $\frac{5}{23}$ E) $\frac{19}{13}$

10. Si: $a = \frac{3}{5}$; $b = \frac{2}{3}$; $c = \frac{5}{8}$; $d = \frac{7}{11}$
¿En qué orden debería ser escritas las fracciones para que aparezcan ordenadas de mayor a menor?

A) bdca B) dbca C) cabd
D) abcd E) abdc

NIVEL 2

11. ¿Cuál es el número cuya tercera parte, más su duplo, más su quinta parte y más su triple, da como resultado 51 460?

A) 3900 B) 9300 C) 9000
D) 9030 E) 3800

12. ¿Cuánto le falta a $\frac{3}{7}$ para ser igual a los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{5}$ de los $\frac{4}{7}$ de 105?

A) $23\frac{4}{7}$ B) $23\frac{2}{7}$ C) $23\frac{1}{7}$ D) $23\frac{7}{4}$ E) $23\frac{2}{3}$

13. Encuentra una fracción tal que si se le agrega 1 al numerador la fracción se convierte en $\frac{2}{7}$, y si al denominador se le resta 2 se convierte en $\frac{1}{4}$.

A) $\frac{3}{13}$ B) $\frac{2}{13}$ C) $\frac{3}{14}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{7}{9}$

14. Si recorrí $\frac{3}{7}$ de un camino; ¿qué fracción de lo que recorrí es el exceso de lo que no recorrí sobre lo que recorrí?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{1}{4}$

15. ¿Qué parte de $3\frac{1}{3}$ es lo que le falta a $\frac{1}{9}$ para ser igual a los $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$?

A) $\frac{11}{45}$ B) $\frac{3}{50}$ C) $\frac{13}{150}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{41}{150}$

16. El producto de los términos de una fracción es 272 y reducida es $\frac{4}{17}$, el numerador es:

A) 34 B) 17 C) 4 D) 16 E) 8

17. Una fracción a/b, aumentada en sus $\frac{13}{21}$ es $\frac{13}{21}$. Si a y b no tienen factores comunes, entonces: b – a es igual a:

A) –21 B) 21 C) 12 D) 8 E) 14

18. El numerador de una fracción excede al denominador en 22. Si el numerador se resta 15, la diferencia entre la fracción primitiva y la nueva fracción es 3. Halla la fracción primitiva.

A) $\frac{29}{7}$ B) $\frac{27}{5}$ C) $\frac{26}{4}$ D) $\frac{28}{6}$ E) $\frac{27}{4}$

19. Si a los $\frac{5}{11}$ de una cantidad se le suma los $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{2}$ de la misma cantidad, se obtiene los $\frac{7}{22}$ de los $\frac{3}{8}$de 1484. Halla la cantidad original.

A) 417 B) 714 C) 147 D) 471 E) 747

20. ¿Cuál es el número que disminuido en 7 unidades produce un resultado igual al que se obtiene multiplicándole por $\frac{3}{10}$?

A) 9 B) 10 C) 20 D) 14 E) 15

NIVEL 3

21. Si: $0,\widehat{a1} + 0,\widehat{a2} + 0,\widehat{a3} = 1,\widehat{27}$. Halla a.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

22. Se tienen 2 grifos, el primer grifo llena un tanque en 3 h, el segundo llena el tanque en 4 h y un desagüe. ¿En qué tiempo vacía el mismo tanque el desagüe, sabiendo que al abrirse los 3 a la misma vez estando vacío, se llena los $\frac{2}{3}$ del tanque en 1 h 36 min?

A) 6 h B) 7 h C) 8 h
D) 10 h E) 5 h

23. En una urbanización los $\frac{2}{5}$ de agua de un tanque no se consume, $\frac{1}{4}$ de lo que se consume se pierde por desperfecto de la tubería. ¿Qué parte del agua que se pierde consume cada familia, si se sabe que abastece a 120 familias por partes iguales?



A) $\frac{3}{50}$ B) $\frac{1}{40}$ C) $\frac{1}{80}$

D) $\frac{1}{56}$ E) $\frac{1}{100}$

24. Si a los términos de 3/7 le aumentamos 2 números que suman 500, resulta una fracción equivalente a la original. ¿Cuáles son los números?

A) 100 y 400 B) 200 y 300 C) 150 y 350
D) 130 y 370 E) 250 y 400

25. Una persona dispone de cierta cantidad de dinero para gastarla en 4 días. El primer día gasta $\frac{1}{4}$ del dinero que tiene, el segundo día gasta $\frac{1}{5}$ de lo que queda, el tercer día gastó 80 soles y el cuarto día gastó el doble del primer día. Si aún le quedan 80 soles, ¿cuánto gastó?

A) S/.800 B) S/.960 C) S/.1150
D) S/.1300 E) S/.1520

26. ¿Cuántas fracciones propias existen, de términos impares y consecutivos que sean menores que 0,83?

A) 9 B) 10 C) 7 D) 5 E) 8

27. He gastado los $\frac{5}{8}$ de mi dinero, si en lugar de gastar los $\frac{5}{8}$ hubiera gastado los $\frac{2}{5}$ de mi dinero tendría ahora 72 soles más de lo que tengo. ¿Cuánto no gasté?

A) 100 B) 120 C) 130 D) 160 E) 180

28. Se retiran de un depósito las $\frac{2}{3}$ partes de su contenido menos 40 litros; con una segunda operación se saca $\frac{2}{5}$ del resto y por último 84 litros restantes. Determina la capacidad del depósito.



A) 250 L B) 260 L C) 280 L
D) 290 L E) 300 L

29. Si: $(0,aaa...) \times 0,(a+1)(a+1)(a+1)... = 0,518.$ Halla el valor de **a** para que se cumpla la igualdad.

A) 11 B) 9 C) 8 D) 6 E) 7

30. Se deja caer una pelota desde una altura de H metros cada rebote que da alcanza los f metros de la altura anterior. Halla la altura que alcanzó si ha dado n rebotes (H = altura).

A) $\frac{Hf^n}{n}$ B) Hf^n C) H^nf D) H^nf^n E) Hf

Claves

NIVEL 1	9. A	17. B	25. E
1. D	10. A	18. B	26. D
2. C	NIVEL 2	19. C	27. B
3. B	11. B	20. B	28. E
4. A	12. A	NIVEL 3	29. D
5. D	13. C	21. B	30. B
6. B	14. C	22. A	
7. A	15. C	23. B	
8. C	16. E	24. C	

Tanto por ciento

DEFINICIÓN

Consiste en dividir una cantidad en 100 partes iguales y tomar un cierto número de dichas partes, es decir:

Total = 100 partes iguales

$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	...	$\frac{1}{100}$	...	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$

n partes

$$\text{n partes} = \text{el n por ciento} = n\% = \frac{n}{100}$$

En general, si una cantidad se divide en 100 partes iguales, cada parte representa 1/100 del total.

Ejemplos:

- 50 partes = 50% = $\frac{50}{100}$
- 25 partes = 25% = $\frac{25}{100}$
- 75 partes = 75% = $\frac{75}{100}$
- 60 partes = 60% = $\frac{60}{100}$
- 10 partes = 10% = $\frac{10}{100}$
- 100 partes = 100% = $\frac{100}{100}$

Atención

Todo número expresado en porcentaje es el número sobre 100.

Como: $n\% = \frac{n}{100}$

$\Rightarrow \% = \frac{1}{100}$



Aplicación del tanto por ciento

El n% de una cantidad A se calcula así:

$$\text{El } n\% \text{ de } A = \frac{n}{100} \times A$$

Ejemplos:

- El 14% de 50 = $\frac{14}{100} \times 50 = 7$
- El 60% de 80 = $\frac{60}{100} \times 80 = 48$
- El 25% de 60 = $\frac{25}{100} \times 60 = 15$
- El 10% del 20% de 300 = $\frac{10}{100} \times \frac{20}{100} \times 300 = 6$
- El 25% del 75& de 160 = $\frac{25}{100} \times \frac{75}{100} \times 160 = 30$

Atención

Toda cantidad representa el 100% respecto de sí misma es decir:

N = 100% N



RELACIÓN PARTE - TODO

Para expresar una relación parte-todo en tanto por ciento, basta con multiplicar por 100%.

$$\frac{\text{Lo que hace de parte}}{\text{Lo que hace de todo}} \times 100\%$$

Ejemplos:

- ¿Qué tanto por ciento es 20 de 80?

$$\frac{20}{80} \times 100\% = 25\%$$

- ¿Qué tanto por ciento es 120 de 150?

$$\frac{120}{150} \times 100\% = 80\%$$

- ¿Qué tanto por ciento representa 63 respecto de 21?

$$\frac{63}{21} \times 100\% = 300\%$$

- ¿Qué tanto por ciento representa 500 de 125?

$$\frac{500}{125} \times 100\% = 400\%$$

Importante

Sea "N" un número.
55% N + 28% N = 83%N
78%N – 39%N = 39%N
También:
N + 80%N = 180%N
N – 30%N = 70%N



Recuerda

Si pierdo o gasto	Queda
20%	80%
35%	65%
2,5%	97,5%
2%	98%
m%	(100 – m)%

Si gano o agrego	Resulta
22%	122%
45%	145%
2,3%	102,3%
0,5%	100,5%
m%	(100 + m)%



DESCUENTOS Y AUMENTOS SUCESIVOS

Descuentos sucesivos

Ejemplo:
¿A qué descuento único equivale 3 descuentos sucesivos del 10%; 20% y 50%?

Resolución:

$$\begin{array}{ccc} D_1 & D_2 & D_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -10\% & -20\% & -50\% \end{array}$$

$$\frac{90}{100} \times \frac{80}{100} \times 50\% = 36\%$$

$\therefore$ Descuento único = 100% – 36% = 64%

Aumentos sucesivos

Ejemplo:
¿A qué aumento único equivale 3 aumentos sucesivos del 10%; 20% y 25%?

Resolución:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ +10\% & +20\% & +25\% \end{array}$$

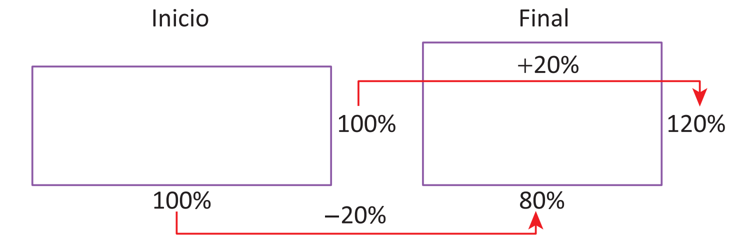
$$\frac{110}{100} \times \frac{120}{100} \times 125\% = 165\%$$

$\therefore$ Aumento único = 165% – 100% = 65%

VARIACIÓN PORCENTUAL (VP)

Ejemplo:
El ancho de un rectángulo aumenta en 20% mientras que el largo disminuye en 20%. ¿En qué tanto por ciento varía el área?

Resolución:



$A_{inicio} = 100\% \times 100\%$ $\qquad$ $A_{final} = 80\% \times 120\%$

$= 100\%$ $\qquad$ $= 96\%$

−4%

∴ El área disminuye en: 100% − 96% = 4%

APLICACIONES COMERCIALES

Cuando se vende con ganancia

Precio fijado: S/.70

Aumento: S/.20

Precio de costo S/.50	Ganancia S/.15	Descuento S/.5

Precio de venta: S/.65

$P_{venta} = P_{costo} + \text{Ganancia}$

$P_{fijado} = P_{venta} + \text{Descuento}$

Cuando se vende con pérdida

Precio de costo: S/.50

S/. 40	Pérdida S/.10

Precio de venta: S/. 40

$P_{venta} = P_{costo} - \text{Pérdida}$

Importante

En los problemas de variación porcentual se puede utilizar la siguiente relación.

$$VP = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{aumento o}\\ \text{disminución}\end{array}\right)}{(\text{valor inicial})} \times 100\%$$

El aumento o disminución se obtiene mediante la diferencia entre el valor final y el valor inicial.



Recuerda

- Generalmente las ganancias o pérdidas se representan como un tanto por ciento del precio de costo.
- Generalmente las rebajas o descuentos se representan como un tanto por ciento del precio fijado.



Problemas resueltos

1 Un futbolista dispara 12 penales acertando todos ellos. ¿Cuántos penales más debe patear (todos fallados), para tener una eficiencia del 60%?

Resolución:

Penales acertados $\Rightarrow 12$

Penales fallados $\Rightarrow x$

Total de penales $\Rightarrow 12 + x$

Luego:

$$60\%\text{ Total} = \text{Acertados}$$

$$60\%(x + 12) = 12$$

$$\frac{60}{100}(x + 12) = 12$$

$$3x + 36 = 60$$

$$3x = 24$$

$$x = 8$$

$\therefore$ Debe patear 8 penales.

2 En un aula de la academia, el 30% de los alumnos son mujeres. Si el 20% de las mujeres y el 30% de los varones salen de paseo. ¿Qué porcentaje del aula fue de paseo?

Resolución:

Sea "T" el total de alumnos.

Del dato: mujeres = 30%T

Entonces: varones = 70%T

Luego: 20% (mujeres) + 30% (varones)

$$20\%(30\%T) + 30\%(70\%T)$$

$$\frac{20}{100} \cdot 30\%T + \frac{30}{100} \cdot 70 \cdot 70\%T$$

$$6\%T + 21\%T \Rightarrow 27\%T$$

Finalmente, se fue de paseo el 27% del total.

3 Dos piezas de tela se vendieron a S/.240 cada una. En una se ganó el 20% y en la otra se perdió el 20%. En toda la transacción, ¿se ganó o se perdió?, ¿cuánto?

Resolución:

Primera pieza de tela:

$P_{V_1} = S/.240;\ G = 20\%P_{C_1}$

$P_{V_1} = P_{C_1} + G$

$240 = P_{C_1} + 20\%P_{C_1}$

$240 = 120\%P_{C_1} \Rightarrow P_{C_1} = S/.200$

Segunda pieza de tela:

$P_{V_2} = S/.240;\ P = 20\%P_{C_2}$

$P_{V_2} = P_{C_2} - P$

$240 = P_{C_2} - 20P_{C_2}$

$240 = 80\%P_{C_2} \Rightarrow P_{C_2} = S/.300$

Luego:

$P_{V_1} + P_{V_2} = S/.480$

$P_{C_1} + P_{C_2} = S/.500$

$\therefore$ En toda la transacción se perdió S/.20.

4 En una empresa trabajan 420 personas, donde el 80% son varones, ¿cuántas deben contratarse para que el 30% del personal sea femenino?

Resolución:

Total = 420

Varones = 80%(420) = 336

Mujeres = 420 – 336 = 84

Sea "x" el número de mujeres que se deben contratar.

Según el enunciado:

$30\%(420 + x) = 84 + x$

$\Rightarrow \frac{30}{100}(420 + x) = 84 + x$

$$1260 + 3x = 840 + 10x$$

$$\Rightarrow 420 = 7x \Rightarrow x = 60$$

Luego, se deben contratar 60 mujeres.

5 El señor A tiene una casa que vale S/.9000. Si la vende al señor B con una pérdida del 10%, luego el señor B la vende al señor A con una ganancia del 10%. ¿Quién gana o pierde y cuánto?

Resolución:

En la 1.ra venta aplicamos:

$P_V = P_c - P$

$P_V = P_c - 10\%\,P_c$

$P_V = 90\%P_c$

$P_V = \frac{90}{100}(9000) \Rightarrow P_V = 8100$

En la 2.da venta aplicamos:

$P_V = P_C + G$

$P_V = P_C + 10\%P_C$

$P_V = 110\%P_C$

$P_V = \frac{110}{100}(8100) \Rightarrow P_V = 8910$

Luego: A pierde 8910 – 8100 = S/.810

6 Se vende un televisor por S/.6000 ganando el 20% del precio de venta más el 20% del precio de costo. Halla el precio de costo del televisor.

Resolución:

Aplicando: $P_V = P_C + G$

$P_V = S/.6000$

$P_C = ?$

$G = 20\%P_V + 20\%P_C$

Reemplazando:

$$P_V = P_C + 20\%P_V + 20\%P_C$$

$$80\%P_V = 120\%P_C$$

$$\frac{80}{100} \times 6000 = \frac{120}{100} \times P_C \Rightarrow P_C = S/.4000$$

7 El 40% del 50% de x es el 30% de "y". ¿Qué porcentaje de (2x + 7y) es (x + y)?

Resolución:

$$\frac{40}{100} \cdot \frac{50}{100} \cdot x = \frac{30}{100} \Rightarrow 2x = 3y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3k}{2k}$$

$x + y = 3k + 2k = 5k \Rightarrow 2x + 7y = 2(3k) + 7(2k) = 20k$

¿Qué porcentaje de (2x + 7y) es (x + y)?

$$\frac{\text{Parte}}{\text{Todo}} \times 100\%$$

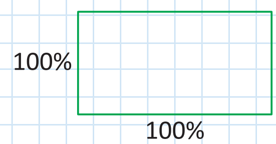
Reemplazando:

$$\frac{x + y}{2x + 7y} \times 100\% \Rightarrow \frac{5k}{20k} \times 100\% = 25\%$$

8 La base de un rectángulo disminuye en 10% y la altura aumenta en 20%. ¿Qué porcentaje varía el área?

Resolución:

Inicialmente se tiene:



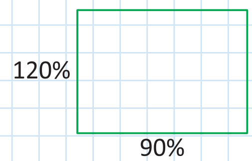
$A = b \times h$

$A = 100\% \times 100\%$

$A = 100\%$

Si la base disminuye 10% entonces ahora mide: (100 – 10)% = 90%; si la altura aumenta 20% entonces ahora mide: (100 + 20)% = 120%

Luego de la variación:



$A = 90\% \times 120\%$

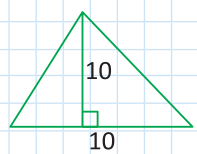
$A = 108\%$

El área aumenta en: (108 – 100)% = 8%

9 La base de un triángulo aumenta en 10% y la altura disminuye en 20%. ¿En qué porcentaje varía el área?

Resolución:

Inicialmente



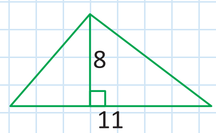
$A = \frac{b \times h}{2}$

$A = \frac{10 \times 10}{2}$

$A = 50$

Si la base aumenta en 10% entonces ahora mide: (100 +10)% = 110%; si la altura disminuye 20% entonces ahora mide: (100 – 20)% = 80%

Luego de la variación:



$A = \frac{8 \times 11}{2}$

$A = 44$

El área disminuye en: (50 – 44) = 6

Luego: 50 ⟶ 100%

6 ⟶ x

x = 12%

∴ El área disminuye en 12%.

Actividades de razonamiento

1. A cómo debo vender lo que me costó S/.64 para ganar el 20% del precio de venta, más el 10% de costo?

A) S/.55 B) S/.77 C) S/.88 D) S/.44 E) S/.66

2. ¿De qué número es 60 el 20% del 25% de los 2/3?

A) 1500 B) 1700 C) 2000 D) 1800 E) 1600

3. Sea x% es igual a los 4/3 de los 3/4 de los 4/5 de 25/10 de 20%, entonces halla el x% de 45.

A) 24 B) 20 C) 22 D) 26 E) 18

4. Halla el (a – b)% del 20 $\left(\frac{1}{a+b}\right)$ del $\frac{(a^2-b^2)}{(a-b)^2}$% de 6000.

A) 12 B) 16 C) 20 D) 14 E) 18

5. Si el lado de un cuadrado aumenta en 20%. ¿En qué porcentaje aumenta su área?

A) 22% B) 44% C) 50% D) 40% E) 48%

6. Un futbolista dispara 17 penales acertando todos ellos, ¿cuántos debe tirar luego, fallando, pero tener un porcentaje de acierto del 85%?

A) 4 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

7. Quiero comprar un CD de música y me falta el 40% de su precio. Si me hacen un descuento de 20%, aún me faltan S/.5, ¿cuánto cuesta el CD?

A) S/.30 B) S/.40 C) S/.35 D) S/.25 E) S/.55

8. En un centro de trabajo hay 800 empleados entre varones y mujeres. El 40% son varones. ¿Cuántas mujeres habrá que contratar para que en total representen el 80% de los empleados?

A) 300 B) 6700 C) 800 D) 400 E) 500

9. En un corral hay 63 animales entre patos y cerdos. Si en total contamos 196 patas. ¿Qué porcentaje representa el número de patos respecto del número de cerdos?

A) 80%   B) 70%   C) 75%   D) 60%   E) 50%

10. Si el 40%A = 60%B. ¿Qué porcentaje de (4A – B) es (2A + B)?

A) 80%   B) 50%   C) 60%   D) 70%   E) 40%

11. En una tienda me ofrecen un reproductor MP3, dándome a escoger entre un descuento sucesivo de 5%; 5% y 10% u otro descuento sucesivo de 10% y 10%. ¿Si escojo el más conveniente, que porcentaje ahorro?

A) 15%   B) 17%   C) 20%   D) 19%   E) 18%

12. En una reunión, el 30% del número de hombres es igual al 80% del número de mujeres. ¿Qué tanto por ciento es el número de mujeres respecto al 60% del número de hombres?

A) 62,5%   B) 50%   C) 72%   D) 60%   E) 70%

13. El $\overline{mn}$% del $\overline{nm}$% del 64% de 62 500 es 4032. Si m > n, calcula m – n.

A) 4   B) 2   C) 1   D) 6   E) 8

14. Si a un círculo le disminuyen 36% de su área. ¿En qué porcentaje habrá disminuido su radio?

A) 40%   B) 80%   C) 20%   D) 30%   E) 10%

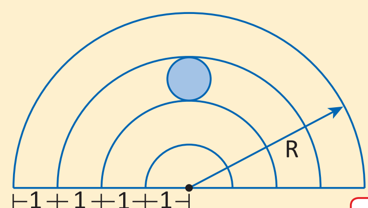
Claves

1. C	5. B	9. A	13. B
2. D	6. C	10. A	14. C
3. E	7. D	11. D	
4. A	8. C	12. A	

Reto

¿En qué tanto por ciento aumenta la región sombreada, si R aumenta en 20%?





Rpta.: 44%

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Dos descuentos sucesivos del 20% y 40%, ¿a qué único descuento equivalen?

   A) 48%   B) 52%   C) 44%
   D) 58%   E) 54%

2. Tres descuentos sucesivos del 10%, 30% y 50% equivalen a un único descuento de:

   A) 31,5%   B) 52%   C) 68,5%
   D) 47,5%   E) 56%

3. Dos incrementos sucesivos del 20%, 30%, ¿a qué aumento equivalen?

   A) 44%   B) 50%   C) 60%
   D) 55%   E) 56%

4. Tres aumentos sucesivos del 10%, 60% y 80% equivalen a un único incremento de:

   A) 200%   B) 116%   C) 216,8%
   D) 126,8%   E) 178,2%

5. El 40% de los 3/4 del 6% de 48 es 0,012 de los 2/3 de una cantidad, halla el 25% de esa cantidad.

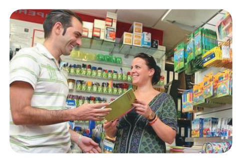
   A) 9   B) 27   C) 36
   D) 108   E) 144

6. El 30% del 20% de los 2/5 de un número equivale al 24% del 0,01% de 1000, halla dicho número.

   A) 700   B) 0,2   C) 1
   D) 120   E) 10

7. ¿Qué porcentaje del 20% del 10% de 400 es el 8% de 0,2% de 1000?

   A) 20%   B) 30%   C) 2%
   D) 3%   E) 6%

8. 

   En un pedido de 10 000 soles, un comerciante puede escoger entre tres descuentos sucesivos del 20%, 20% y 10% o tres descuentos sucesivos de 40%, 5% y 5%, escogiendo el mejor. ¿Cuánto se puede ahorrar?

   A) S/.350   B) S/.340   C) S/.335
   D) S/.360   E) S/.345

9. El 40% del 50% de x es el 30% de y. ¿Qué porcentaje de (2x + 7y) es (x + y)?

   A) 25%   B) 12,5%   C) 20%
   D) 10%   E) 22,5%

10. En una reunión se sabe que el 30% del número de hombres es igual al 40% del número de mujeres. ¿Qué porcentaje del total son hombres?

A) 62% B) 53,5% C) 57,1%
D) 82,5% E) 42%

NIVEL 2

11. El precio de un artículo se rebaja en 20%, para volverlo al precio original el nuevo precio se debe aumentar en:

A) 25% B) 20% C) 24%
D) 30% E) 50%

12. Si pierdo el 30% del dinero que tengo y ganara el 28% de lo que me quedaría perdería 156 soles. ¿Cuánto tengo?

A) S/.1450 B) S/.1400 C) S/.1750
D) S/.1500 E) S/.1550

13. Si Jorge tuviera el 25% más de la edad que tiene tendría 65 años. ¿Qué edad tuvo hace 4 años?

A) 56 años B) 48 años C) 46 años
D) 42 años E) 52 años

14. Si el lado de un triángulo equilátero aumenta 30%, ¿cuál es la variación del área?

A) +3% B) +40% C) +53%
D) +69% E) +44%

15. Si x aumenta en 44%, ¿qué ocurre con $x^{1/2}$?

A) Aumenta en 20% B) Aumenta en 120%
C) Aumenta en 44% D) Aumenta en 144%
E) Aumenta en 12%

16. El radio de un círculo se duplica. ¿En qué porcentaje aumenta el área?

A) 200% B) 400% C) 300%
D) 240% E) 320%

17. Si el lado de un cuadrado se triplica, ¿en qué porcentaje aumenta el área?

A) 800% B) 900% C) 300%
D) 500% E) 600%

18. Si la longitud de una circunferencia aumenta 40%, ¿qué ocurre con el área del círculo?

A) Aumenta 96% B) Aumenta 120%
C) Aumenta 12% D) Aumenta 144%
E) Aumenta 30%

19. Si a un círculo le disminuyen 36% de su área, ¿en qué porcentaje habrá disminuido su radio?

A) 60% B) 10% C) 20%
D) 80% E) 30%

20. Cuando el lado de un cuadrado se incrementa en 30%, resulta que el área aumenta en 621 m^2. Calcular el lado inicial del cuadrado.

A) 10 m B) 12 m C) 25 m
D) 30 m E) 20 m

NIVEL 3

21. En una tienda se hace al cliente dos descuentos sucesivos del 10% y el 20% y aun gana el 40% del costo. Si el departamento de compras de dicha tienda compra un artículo en S/.360, ¿qué precio fijará para su venta?

A) S/.700 B) S/.600 C) S/.500
D) S/.400 E) S/.320

22. Se rebaja el precio de un artículo en 10% y 20% sucesivamente. ¿En qué tanto por ciento debe incrementarse el precio rebajado para que el nuevo precio sea 8% más que el precio original?

A) 84% B) 50% C) 63%
D) 59% E) 75%

23. Un tenista debe retirarse cuando tenga un 90% de triunfos. Si hasta el momento ha participado 100 veces y ha obtenido 85 victorias, ¿cuántas participaciones como mínimo debe realizar para poder retirarse?



A) 50 B) 35 C) 48 D) 52 E) 30

24. Si el 80% del 50% de M es el 30% de N, ¿qué porcentaje de (2M + 7N) es (M + N)?

A) 14,5% B) 20,5% C) 19,5% D) 20% E) 18%

25. Indica V o F:

( ) Siempre el 20% más el 30% es el 50%.
( ) El 20% del 80% de un número es equivalente al 16% del número.
( ) La sexta parte del cuádruple de un número más el 20% de dicho número es equivalente al 70% de dicho número.

A) FFF B) VFV C) FVV D) FVF E) VVV

26. Si la base de un triángulo se incrementa en 30% y la altura disminuye en un 20%, ¿cómo varía el área?

A) –10% B) +4% C) –4%
D) –2% E) +2%

27. En un triángulo la base se reduce en 10% mientras que la altura se aumenta en 10%, entonces el área:

A) Se reduce en 2% B) No varía
C) Aumenta 10% D) Se reduce en 1%
E) Depende de las medidas

28. Si el área de un círculo aumentó en 300%, ¿por cuánto se multiplicó su radio?

A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) 4
D) $\sqrt{2}$ E) 3

29. En la siguiente expresión: $E = \dfrac{x.y^2.\sqrt{z}}{w.p}$,
si z disminuye en 19%, y aumenta en 40% y p disminuye en 30%, ¿en qué porcentaje varía E?

A) Aumentó en 190% B) Disminuyó en 190%
C) Aumentó en 152% D) Aumentó en 135%
E) Disminuyó en 98%

30. Un arquitecto ha previsto un recubrimiento de losetas circulares para una cierta pared. Si todas las losetas son iguales, ¿cuál es el mínimo porcentaje de área de la pared que puede ser cubierto con dichas losetas?



A) 78,5% B) 91% C) 75%
D) 50% E) 60%

Claves

NIVEL 1	9. A	17. A	25. D
1. B	10. C	18. A	26. B
2. C	NIVEL 2	19. C	27. D
3. E	11. A	20. D	28. B
4. C	12. D	NIVEL 3	29. C
5. B	13. B	21. A	30. A
6. C	14. D	22. B	
7. C	15. A	23. A	
8. E	16. C	24. B	

Magnitudes proporcionales

Atención

La gráfica de dos magnitudes DP resultan ser puntos sobre la recta.

(A) DP (B)

$\Rightarrow \dfrac{\text{Valor de A}}{\text{Valor de B}} = \text{constante}$



MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES (DP)

Dos magnitudes son DP si al aumentar o disminuir el valor de una de ellas, el valor de la otra magnitud también aumenta o disminuye en la misma proporción. El cociente de sus valores correspondientes permanece constante.

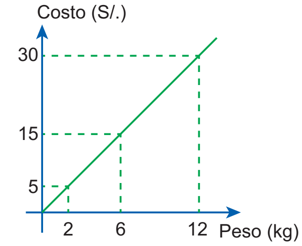
$$(\text{Valor de A})\ \text{DP}\ (\text{Valor de B}) \Rightarrow \frac{A}{B} = \text{constante}$$

Ejemplo:
Beatriz realiza las compras en el mercado, en el cual adquirió 6 kg de arroz por un costo de S/. 15, comparando las magnitudes peso y costo tendremos:

÷ 3 (6 → 2) ; × 2 (6 → 12)

Peso (kg)	2	6	12
Costo (S/.)	5	15	30

÷ 3 (15 → 5) ; × 2 (15 → 30)



Conclusión:

- Si el peso adquirido se duplica ($6 \times 2 = 12$) el costo también se duplica ($15 \times 2 = 30$).
- Si el peso adquirido se reduce a la tercera parte ($6 \div 3 = 2$) el costo también se reduce a la tercera parte ($15 \div 3 = 5$).

$$\frac{\text{Valores (Peso)}}{\text{Valores (Costo)}} = \frac{2}{5} = \frac{6}{15} = \frac{12}{30} = \text{cte.}$$

Atención

La gráfica de dos magnitudes IP resultan puntos sobre una hipérbola equilátera.

(A) IP (B)

$\Rightarrow$ (Valor de A)(Valor de B) = constante



MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES (IP)

Dos magnitudes son IP si cuando el valor de una de las magnitudes aumenta o disminuye, el valor de la otra magnitud disminuye o aumenta, respectivamente en la misma proporción. El producto de sus valores correspondientes permanece constante.

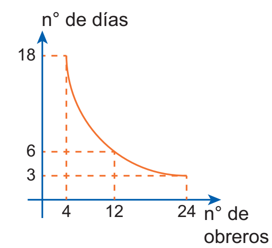
$$(\text{Valor de A})\ \text{IP}\ (\text{Valor de B}) \Rightarrow A \times B = \text{constante}$$

Ejemplo:
12 obreros pueden realizar un trabajo en 6 días, comparando las magnitudes número de obreros y número de días, tendremos:

÷ 3 (12 → 4) ; × 2 (12 → 24)

n.° de obreros	4	12	24
n.° de días	18	6	3

× 3 (6 → 18) ; ÷ 2 (6 → 3)



Conclusión:

- Si el número de obreros se duplica ($12 \times 2 = 24$) el número de días se reduce a la mitad ($6 \div 2 = 3$).
- Si el número de obreros se reduce a la tercera parte ($12 \div 3 = 4$) el número de días se triplica ($6 \times 3 = 18$).

[Valor (n.° de obreros)][Valor (n.° de días)] $= 4 \times 18 = 12 \times 6 = 24 \times 3 =$ cte.

COMPARACIÓN SIMPLE

Se da cuando solo se comparan dos magnitudes. Estas dos magnitudes pueden variar en forma directa o inversa.

Ejemplo:

Si ocho kilogramos de pescado cuesta S/.80, ¿cuántos kilogramos de pescado compraré con S/.60?

Resolución:

DP

Peso	Costo
8 kg	S/. 80
x	S/. 60

$$(\text{Peso})\ \text{DP}\ (\text{Costo}) \Rightarrow \frac{(\text{Peso})}{(\text{Costo})} = \text{constante}$$

$$\frac{8}{80} = \frac{x}{60}$$

$$x = 6\ \text{kg}$$

∴ Compraré 6 kg de pescado.

COMPARACIÓN MÚLTIPLE

Se da cuando se comparan más de dos magnitudes directas y/o inversas en un mismo problema.

Ejemplo:

12 obreros pueden construir una casa en 40 días. ¿Cuántos obreros se requieren para construir 4 casas en 20 días?

Resolución:

IP (n.° de obreros – Días); DP (n.° de obreros – n.° de casas)

n.° de obreros	n.° de casas	Días
12	1	40
x	4	20

$$\frac{\text{n° de obreros} \times \text{días}}{\text{n° de casas}} = \text{constante} \Rightarrow \frac{x.20}{4} = \frac{12.40}{1}$$

$$x = 24 . 4$$

$$x = 96$$

∴ Se requieren 96 obreros.

APLICACIONES DE MAGNITUDES

Compara las siguientes magnitudes:

(n.° de días)	IP	(n.° de obreros)
(n.° de días)	DP	(Obra)
(n.° de días)	IP	(n.° de horas diarias)
(n.° de días)	IP	(Eficiencia)
(n.° de días)	DP	(Dificultad)

Atención

Las magnitudes que se comparan también pueden ser IP.

Ejemplo:

Un grupo de obreros demora 6 días en hacer una obra. ¿Cuánto demora otro grupo cuya eficiencia es el doble del anterior?

Resolución:

Días	Eficiencia
6	1
x	2

(Días) IP (Eficiencia)

$\Rightarrow$ 6 . 1 = 2x

x = 3

∴ Demora 3 días.





Recuerda

- Si hay más obreros se demorarán menos días $\Rightarrow$ (n.° de obreros) IP (días)
- Si hay más casas se necesitarán más obreros $\Rightarrow$ (n.° de obreros) DP (n.° de casas)

Nota

Comparemos las siguientes magnitudes:

(Ganancia) DP (Capital)

(Ganancia) DP (Tiempo)

Respecto a sus valores:

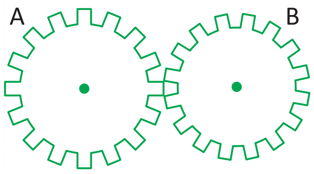
$$\frac{(\text{Ganancia})}{(\text{Capital})(\text{tiempo})} = \text{cte.}$$

Respecto a sus valores:

$$\frac{(\text{n.° de días})(\text{n.° de obreros})(\text{Eficiencia})(\text{n.° de horas díarias})}{(\text{Obra})(\text{Dificultad})} = \text{constante}$$

ENGRANAJES

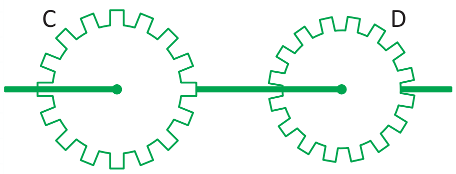
1.er caso: cuando están en contacto (engranan).



$$d_A \times V_A = d_B \times V_B$$

d_A: número de dientes de A
V_A: número de vueltas de A
d_B: número de dientes de B
V_B: número de vueltas de B

2.° caso: cuando están unidos por un eje.

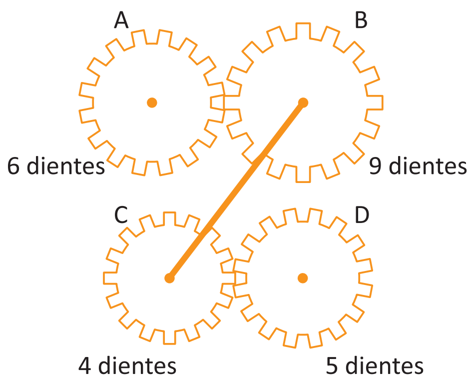


$$V_C = V_D$$

V_C: número de vueltas de C
V_D: numero de vueltas de D

Ejemplo:

La figura muestra un sistema de engranajes. Calcula el número de vueltas que girará la rueda D cuando A gire 30 vueltas.



Resolución:

Sabemos que: n.° de dientes × n.° de vueltas = constante

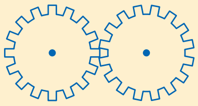
$$d_A \times V_A = d_B \times V_B$$
$$6 \times 30 = 9 \times V_B$$
$$V_B = 2 \times 10$$
$$V_B = 20 \Rightarrow V_C = 20$$

$$d_C \times V_C = d_D \times V_D$$
$$4 \times 20 = 5 \times V_D$$
$$V_D = 4 \times 4$$
$$V_D = 16$$

∴ La rueda D gira 16 vueltas.

Recuerda

Cuando dos ruedas están engranadas.



A mayor número de dientes, menor número de vueltas.

A menor número de dientes, mayor número de vueltas.



Atención

- Las ruedas A y B engranan entonces aplicamos el 1.er caso.
  Donde: $V_B = 20$
- Las ruedas B y C tienen el mismo eje, por lo tanto:
  $V_B = V_C \Rightarrow V_C = 20$
- Las ruedas C y D engranan 1.er, entonces aplicamos el 1.er caso.
  Donde: $V_D = 16$



Problemas resueltos

1 Se sabe que A^2 es IP a B y DP a $\sqrt[3]{C}$, calcula el valor de B cuando A = 12 y C = 8. Además se sabe que cuando A = 9 y C = 27 el valor de B es 8.

Resolución:

Según el enunciado: $\dfrac{A^2 . B}{\sqrt[3]{C}} = \text{constante}$

Reemplazando: $\dfrac{12^2 . B}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{9^2 . 8}{\sqrt[3]{27}}$

$$\frac{144B}{2} = \frac{81 . 8}{3}$$

$$72B = 27 . 8$$

$$\therefore B = 3$$

2 La diferencia de A y B es DP a C^2 e IP a D. Cuando A es el triple de B, y C vale 2, entonces D es igual a 8. ¿A cuánto será igual D cuando A sea el doble de B y C tome el valor de 3?

Resolución:

Según los datos:

$$\frac{(A - B) . D}{C^2} = \text{constante}$$

En el problema:

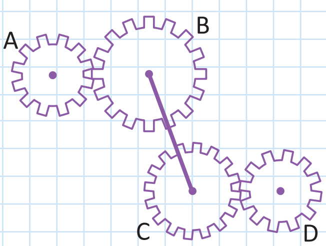
$$\frac{(3B - B)8}{2^2} = \frac{(2B - B) . D}{3^2}$$

$$\frac{2B.8}{4} = \frac{B . D}{9}$$

$$\therefore D = 36$$

3 Una rueda "A" de 20 dientes, engrana con otra rueda B de 75 dientes. Fija al eje B, hay otra rueda C de 35 dientes que engrana con otra rueda D de 20 dientes. Si A da 60 vueltas por minuto, ¿cuántas vueltas dará la rueda D?

Resolución:



$$d_A \times V_A = d_B \times V_B$$

$$26 \times 60 = 75 \times V_B$$

$$V_B = 16$$

$$\Rightarrow V_c = 16$$

$$d_C \times V_C = d_C . V_D$$

$$35 \times 16 = 20 . V_D$$

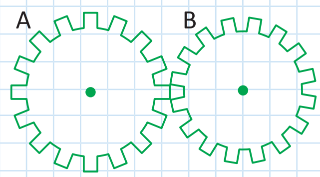
$$V_D = 28$$

Sabemos que:

n.° vueltas × n.° de dientes = constante

4 Una rueda "A" de 100 dientes engrana con otra rueda "B" de 60 dientes. Si la rueda "A" tiene una velocidad de 30 vueltas por minuto, ¿cuántas vueltas dará la rueda "B" en 15 minutos?

Resolución:



Sabemos que:

(n.° dientes)(n.° de vueltas) = constante

$$D_A \times V_A = d_B \times V_B$$

$$100 \times 30 = 60 \times V_B$$

$$V_B = 50$$

∴ En 15 minutos la rueda B dará:

50 × 15 = 750 vueltas.

5 El precio de un diamante es DP al cuadrado de su peso. Si un diamante que pesa 20 g cuesta S/.400, ¿cuánto costará otro diamante que pesa 25 g?

Resolución:

Según el enunciado: $\dfrac{\text{Precio}}{\text{Peso}^2} = \text{constante}$

$$\frac{400}{20^2} = \frac{x}{25^2}$$

$$\frac{400}{400} = \frac{x}{625}$$

$$\therefore \ x = S/. 625$$

6 El sueldo de un empleado es DP a su edad y a la raíz cuadrada de los años de servicio en la empresa. Si Miguel tiene 30 años y 4 años trabajando en la empresa, ganando S/.1200, ¿cuál será el sueldo de Jaime que tiene 32 años y 9 años de trabajo?

Resolución:

Según el problema:

$$\frac{\text{Sueldo}}{\text{Edad} \times \sqrt{\text{Tiempo}}} = \text{constante}$$

$$\frac{1200}{30 \times \sqrt{4}} = \frac{x}{32\sqrt{9}}$$

$$\frac{1200}{30 \times 2} = \frac{x}{32 \times 3}$$

$$x = 40 \times 16 \times 3$$

$$x = S/.1920$$

7 El gasto de una persona es DP a su sueldo, siendo el resto ahorrado. Un señor cuyo sueldo es S/.900 ahorra S/.90. ¿Cuál será su sueldo cuando su gasto sea S/.1260?

Resolución:

$$\frac{\text{Gasto}}{\text{Sueldo}} = \text{constante}; \quad \text{Sueldo} = S/.900$$

$$\text{Ahorra} = S/.90$$

$$\Rightarrow \text{Gasta} = S/.810$$

Luego: $\dfrac{810}{900} = \dfrac{1260}{x} \Rightarrow x = 140 \times 10$

$$\therefore x = S/.1400$$

8 El sueldo de un empleado es DP a la raíz cuadrada del tiempo de servicio en meses. Si Cristina tiene 9 meses en cierto trabajo y gana S/.1050; mientras que Marco tiene 25 meses en el mismo trabajo. ¿Cuánto gana Marco?

Resolución:

$$\frac{\text{Sueldo}}{\sqrt{\text{Tiempo}}} = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \frac{1050}{\sqrt{9}} = \frac{x}{\sqrt{25}}$$

$$\frac{1050}{3} = \frac{x}{5} \quad \therefore x = S/.\ 1750$$

9 El sueldo de un empleado es directamente proporcional a su rendimiento e inversamente proporcional al número de días que ha faltado. Si José tiene un sueldo mensual de S/.600 y su rendimiento es como 5 y faltó 4 días, entonces, ¿cuál es el sueldo de Miguel, si su rendimiento es como 8 y faltó 3 días?

Resolución:

$$\frac{\text{Sueldo} \times \text{Faltas}}{\text{Rendimiento}} = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \frac{600 \,.\, 4}{5} = \frac{S \,.\, 3}{8}$$

$$S = 40 \,.\, 4 \,.\, 8$$

$$\therefore S = S/.\ 1280$$

10 El precio de una casa es directamente proporcional al área e inversamente proporcional a la distancia de Lima. Si una casa ubicada a 75 km cuesta S/. 45 000, ¿cuánto costará una casa del mismo material, si su área es el triple de la anterior y se encuentra a 150 km de distancia?

Resolución:

$$\frac{\text{Precio.Distancia}}{\text{Área}} = \text{constante}$$

$$\frac{45000 \,.\, 75}{A} = \frac{x \,.\, 150}{3A} \Rightarrow x = 22 \,.\, 500 \,.\, 3$$

$$x = S/.67\ 500$$

11 Si A es IP a B^2 y DP a C, calcula a + b.

A	45	a	9
B	2	3	b
C	30	15	24

Resolución:

$$\frac{A \times B^2}{C} = \text{constante}$$

$$\frac{45 \,.\, 4}{30} = \frac{a \,.\, 9}{15} \Rightarrow a = 5.2 \Rightarrow a = 10$$

$$\frac{45 \,.\, 4}{30} = \frac{9 \,.\, b^2}{24} \Rightarrow b^2 = 4.4 \Rightarrow b = 4$$

$$\therefore a + b = 14$$

12 Si A es DP a $\sqrt{B}$ e IP a C, calcula m + n.

A	15	14	m
B	36	n	25
C	8	10	4

Resolución:

$$\frac{A \times C}{\sqrt{B}} = \text{constante}$$

$$\frac{15 \times 8}{6} = \frac{14 \times 10}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 7 \Rightarrow n = 49$$

$$\frac{15 \,.\, 8}{6} = \frac{m \,.\, 4}{5} \Rightarrow m = 5 \,.\, 5 \Rightarrow m = 25$$

$$\therefore m + n = 74$$

Actividades de razonamiento

1. Sean las magnitudes A y B donde A DP B^2, cuando A = 100; B = 5. Calcula B, cuando A = 9.

A) 3/2 B) 5/2 C) 2/3 D) 2/5 E) 1

2. Sean las magnitudes A y B donde $\sqrt{A}$ IP B; cuando A = 256, B = 27. Calcula A cuando B = 48.

A) 9 B) 81 C) 3 D) 27 E) 36

3. 15 hombres pueden cultivar un campo en 8 días, calcula, ¿cuántos hombres se necesitarán para cultivar el mismo campo en 5 días?

A) 12 B) 36 C) 28 D) 30 E) 24

4. Si 40 obreros hacen una obra en 21 días, ¿cuántos días menos se hubieran demorado si trabajan 2 obreros más?

A) 3 días menos B) 2 días menos C) 4 días menos
D) 1 día menos E) 5 días menos

5. 30 obreros pueden hacer 100 carpetas en 32 días. ¿Cuántos días demorarán 40 obreros en hacer 150 carpetas?

A) 54 B) 48 C) 36 D) 27 E) 30

6. Un grupo de peones emplean 16 días para sembrar 42 m^2. ¿Cuántos días más emplearían en sembrar 735 m^2 los mismos peones?

A) 280 días más B) 264 días más C) 250 días más
D) 296 días más E) 270 días más

7. Un albañil tenía pensado hacer un muro en 15 días, pero tardó 3 días más por trabajar 3 horas menos cada día. ¿Cuántas horas trabajó diariamente?

A) 20 B) 15 C) 18 D) 12 E) 25

8. Si 12 máquinas pueden producir 35 mil lapiceros en 21 horas. ¿Cuántos lapiceros podrán producir 24 máquinas en 18 horas?

A) 50 000 B) 20 000 C) 45 000
D) 30 000 E) 60 000

9. Si 20 obreros se demoran 15 días de 7 horas diarias de trabajo en sembrar 50 m^2 de terreno, ¿cuántos días de 8 horas diarias de trabajo se demorarán en sembrar 80 m^2, 15 peones?

A) 28 B) 35 C) 30 D) 40 E) 42

10. Si 30 obreros trabajando 10 horas diarias durante 16 días pueden asfaltar una carretera de 6000 m de largo. ¿Cuántos hombres serán necesarios para asfaltar una carretera de 9000 m de largo, trabajando 8 horas diarias durante 18 días?

A) 60 B) 30 C) 25 D) 10 E) 50

11. Con 8 obreros se puede hacer una obra en 20 días. Con 10 obreros 4 veces más rápidos que los anteriores, ¿en cuántos días se hará una obra 9 veces más difícil que la anterior?

A) 30 B) 31 C) 32 D) 34 E) 35

12. 20 obreros han hecho $\frac{1}{3}$ de un trabajo en 12 días. En ese momento abandonan el trabajo 8 obreros. ¿Cuántos días se empleó en hacer toda la obra?

A) 28 B) 52 C) 40 D) 64 E) 30

13. Dos ruedas de 45 y 54 dientes engranan y están girando. Si la primera rueda da 300 RPM, ¿cuántas vueltas dará la segunda rueda en 5 minutos?

A) 1150 B) 1050 C) 1250 D) 1500 E) 1300

14. Dos engranajes de 63 y 35 dientes están en contacto. Cuando funcionan 3 minutos, uno ha dado 24 vueltas más que el otro. ¿Cuántas vueltas da el engranaje pequeño en 1 minuto?

A) 10 B) 18 C) 15 D) 12 E) 20

Claves

1. A	5. C	9. A	13. C
2. B	6. B	10. E	14. B
3. E	7. B	11. C	
4. D	8. E	12. B	

Reto



Si "A" es DP a B^2 y "A" es IP a "C", entonces "B" es DP a:

Rpta.: $\sqrt{C}$

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Sean las magnitudes A y B donde A IP B^2, cuando $A = 20$; $B = 16$. Calcula B, cuando $A = 5$.

   A) 30 B) 35 C) 34
   D) 32 E) 28

2. Sean las magnitudes A y B donde A DP B^3, cuando $A = 125$; $B = 15$. Calcula B, cuando $A = 8$.

   A) 12 B) 10 C) 8
   D) 9 E) 6

3. Sean las magnitudes A y B donde A DP $B^{1/2}$, cuando $A = 16$; $B = 16$. Calcula B^{-1}, cuando $A = 2$.

   A) 10 B) 8 C) 4
   D) 6 E) 2

4. Sean las magnitudes A y B donde A^2 DP B^3, cuando $A = 12$, $B = 2$. Calcula B, cuando $A = 3\sqrt{2}$.

   A) 8 B) 7 C) 2
   D) 3 E) 1

5. 20 hombres pueden construir una casa en 7 días, ¿cuántos hombres más se necesitarán para construir la misma casa en 4 días?

   A) 6 B) 8 C) 10
   D) 15 E) 12

6. Un grupo de obreros emplean 8 días para construir un muro de 40 m^2, ¿cuántos días más emplearan para construir 320 m^2 los mismos obreros?

   A) 53 B) 48 C) 56
   D) 55 E) 50

7. 
   Un grupo de peones emplean 10 días para sembrar un campo de 30 m^2, ¿en cuántos días la misma cantidad de peones doblemente eficientes se necesitarán para sembrar 90 m^2 de campo?

   A) 15 B) 20 C) 22
   D) 18 E) 19

8. Una guarnición de 1600 hombres tienen víveres para 10 días a razón de 3 raciones diarias cada hombre. ¿Cuántos días durarán los víveres si cada hombre toma 2 raciones diarias?

   A) 20 B) 12 C) 10
   D) 15 E) 18

9. Si 16 obreros con una eficiencia como 4 hacen una obra en 18 días, ¿en cuántos días 12 obreros con una eficiencia como 3 harán la misma obra?

   A) 33 B) 28 C) 32
   D) 35 E) 30

10. Si 10 obreros pueden hacer una obra en doce días, ¿cuántos obreros podrán hacer el triple de la obra en 10 días?

A) 32 B) 36 C) 40
D) 38 E) 30

NIVEL 2

11. Calcula "x", si la magnitud A es inversamente proporcional con B^2.

A	3	x
B	4	2

A) 14 B) 8 C) 10
D) 6 E) 12

12. Calcula "x", si la magnitud A es inversamente proporcional a $\sqrt{B}$.

A	6	21
B	49	x

A) 8 B) 2 C) 6
D) 10 E) 4

13. Si A es DP a $\sqrt[3]{B}$, calcula "x".

A	20	x
B	64	125

A) 16 B) 30 C) 25
D) 24 E) 20

14. Si A es IP a $\sqrt{B}$, calcula x + y.

A	12	x	16
B	16	4	y

A) 33 B) 35 C) 28
D) 31 E) 30

15. El área de un círculo es DP al cuadrado de su radio. ¿En cuánto variará el área de un círculo si el radio se duplica?

A) Se duplica B) Se cuadriplica
C) Se reduce a la mitad D) Se triplica
E) Faltan datos

16. El gasto de una persona es DP a su sueldo, siendo el resto ahorrado. Un señor cuyo sueldo mensual es de S/.1200 ahorra S/.200. ¿Cuál será su sueldo cuando su gasto sea de S/.3000?

A) S/.2000 B) S/.2500 C) S/.3200
D) S/.3600 E) S/.3000

17. El precio de un diamante es DP al cuadrado de su peso. Si un diamante que pesa 60 g cuesta S/.240. ¿Cuánto costará otro diamante que pesa 90 g?

A) S/.540 B) S/.400 C) S/.450
D) S/.500 E) S/.380

18. Karla es una taxista que acostumbra cobrar de forma directamente proporcional al número de pasajeros que transporta y a la distancia recorrida. Si a 2 pasajeros les cobró S/.30 por recorrer 60 km, ¿cuánto les cobrará a 4 pasajeros por recorrer 15 km?



A) S/.28 B) S/.30 C) S/.20
D) S/.25 E) S/.15

19. Los rendimientos de cuatro operarios son DP a los primeros impares positivos. Si se desea repartir una bonificación de S/.640, ¿cuánto le corresponde al más eficiente?

A) S/.150 B) S/.280 C) S/.250
D) S/.100 E) S/.300

20. Reparte 1180 en tres partes inversamente proporcionales a los números 5; 7 y 2. Da como respuesta la parte que no es mayor ni menor.

A) S/.280 B) S/.300 C) S/.250
D) S/.310 E) S/.120

NIVEL 3

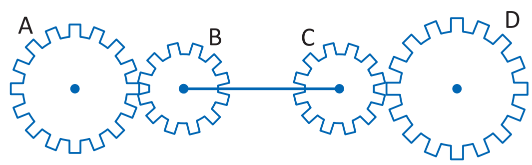
21. Una rueda de 120 dientes engrana con otra de "y" dientes, la primera da 210 vueltas/minuto, y la segunda 350 vueltas/minuto. El valor de "y" es:

A) 80 B) 90 C) 82
D) 72 E) 60

22. Una rueda "A" de 40 dientes, engrana con otra rueda B de 80 dientes. Fija al eje B, hay otra rueda C de 64 dientes que engrana con otra rueda D de 28 dientes. Si "A" da 70 vueltas por minuto. ¿Cuántas vueltas dará la rueda D?

A) 50 B) 90 C) 80
D) 70 E) 60

23. En el siguiente sistema de ruedas engranadas:



las ruedas A; B; C y D tienen 50; 30; 20 y 60 dientes respectivamente. Si la rueda "A" da 90 vueltas en 1 minuto, ¿cuántas vueltas dará "D" en 2 minutos?

A) 100 B) 90 C) 120
D) 110 E) 80

24. Dos bombas trabajando 5 horas diarias durante 4 días, logran bajar el nivel del agua en 65 cm. ¿En cuántos días, 3 bombas similares, bajarán el nivel en 78 cm funcionando 8 horas diarias?

UNMSM 2004-II

A) 10 B) 6 C) 4
D) 8 E) 2

25. Si A es IP a $\sqrt{B}$, calcula "x + y".

A	12	x	16
B	16	4	y

A) 40 B) 38 C) 30 D) 33 E) 36

26. Si A es IP a B y DP a C, calcula "x + y".

A	8	x	24
B	6	15	y
C	4	5	6

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E)7

27. Si A es IP a B^2 y DP a C, calcula "x + y".

A	45	x	9
B	2	3	y
C	30	15	24

A) 12 B) 18 C) 14
D) 10 E) 16

28. Si A es DP a $\sqrt{B}$ e IP a C, calcula "x + y".

A	15	14	y
B	36	x	25
C	8	10	4

A) 72 B) 74 C) 70
D) 68 E) 65

29. El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Se sabe que un diamante cuesta 1000 dólares, ¿cuánto costará si se parte en 2 pedazos que son proporcionales a 2 y 3?

A) 600 dólares B) 650 dólares
C) 840 dólares D) 520 dólares
E) 700 dólares

30. El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su volumen. Se tiene un diamante de S/.36 000 y se le divide en tres partes iguales. ¿Cuánto se pierde debido al fraccionamiento?



A) S/.24 000 B) S/.12 000 C) S/.15 000
D) S/.20 000 E) S/.18 000

Claves

NIVEL 1
1. D
2. E
3. C
4. E
5. B
6. C
7. A
8. D
9. C
10. B

NIVEL 2
11. E
12. E
13. C
14. A
15. B
16. D
17. A
18. E
19. B
20. A

NIVEL 3
21. D
22. C
23. A
24. E
25. D
26. E
27. C
28. B
29. D
30. A

Orden de información

DEFINICIÓN

Esta serie de problemas consiste en ordenar una cantidad de datos (información respecto a una situación) y sobre la base de estos datos deducir una respuesta al problema. Este ordenamiento puede ser:

Ordenamiento circular

Se aplica para el ordenamiento de personas alrededor de una mesa circular.

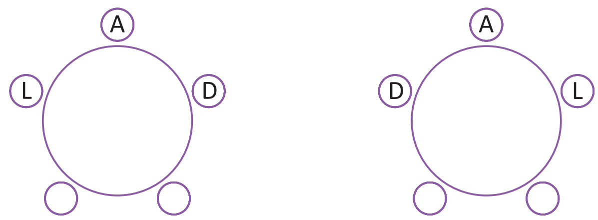
Ejemplo:
5 amigos se sientan alrededor de una mesa circular. Se sabe que:

- Axel se sienta junto a Lucas y Danilo.
- Junto a Danilo se sienta Benito.

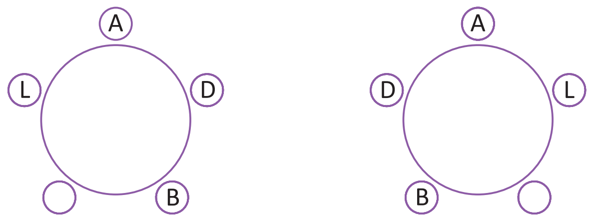
¿Entre quiénes se sienta Edison?

Resolución:

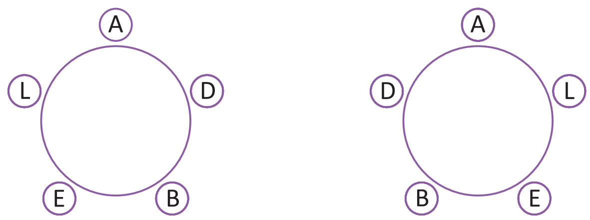
- Axel se sienta junto a Lucas y Danilo, entonces existen 2 posibles ordenamientos.



- Junto a Danilo se sienta Benito.



- Edison es el quinto amigo.



∴ En cualquiera de los casos Edison se sienta entre Lucas y Benito.

Ordenamiento por cuadros de doble entrada

Se aplica para el ordenamiento de personas, que están relacionadas con alguna característica.

Ejemplo:
5 amigas cuyos nombres son: Margarita, Azucena, Rosa, Violeta y Jazmín, reciben de sus amigos un ramo de flores cada una, que de casualidad concuerdan con sus nombres, aunque ninguna recibe de acuerdo al suyo, se sabe que:

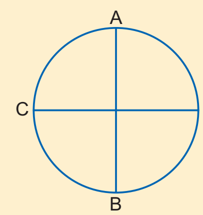
Atención

El primer sujeto a ubicar en una distribución circular puede ocupar cualquiera de los lugares.





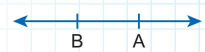
Importante



"A" está frente a "B"
"C" está a la derecha de "A"
"C" está a la izquierda de "B"

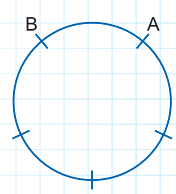
Nota

- En un ordenamiento lineal:



"A" está a la derecha de "B"

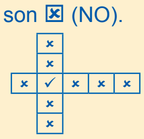
- En un ordenamiento circular:



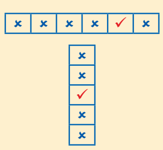
"A" está a la izquierda de "B"

> **Atención**
> Es necesario leer varias veces el enunciado para ir sacándo conclusiones que permitan llenar el cuadro de doble entrada.



> **Recuerda**
> Si se coloca ☑ (SÍ), el resto de espacios en una fila y columna son ☒ (NO).
>
> 
>
> En el ejemplo, esto lo aplicamos con Violeta, quien por dato recibe el ramo de rosas.



> **Recuerda**
> Si en una fila o columna queda un cuadro en blanco y el resto es ☒, entonces, el cuadro en blanco debe ser ☑.
>
> 
>
> En el ejemplo, esta aplicación la observamos en la columna con Rosa, quien por descarte de datos recibe el ramo de jazmines.

- El ramo de rosas lo recibió Violeta.
- A Margarita le hubiera gustado recibir azucenas.
- Ni Margarita ni Azucena recibieron los jazmines.

Indica el ramo de flores que recibió cada una.

Resolución:

Ninguna recibe el ramo de flores de acuerdo a su nombre.

	Margarita	Azucena	Rosa	Violeta	Jazmín
Margarita	×				
Azucena		×			
Rosa			×		
Violeta				×	
Jazmín					×

El ramo de rosas lo recibió Violeta.

	Margarita	Azucena	Rosa	Violeta	Jazmín
Margarita	×		×		
Azucena		×	×		
Rosa			×		
Violeta	×	×	✓	×	×
Jazmín			×		×

A Margarita le hubiera gustado recibir azucenas, entonces Margarita no recibe azucenas.

	Margarita	Azucena	Rosa	Violeta	Jazmín
Margarita	×	×	×		
Azucena		×	×		
Rosa			×		
Violeta	×	×	✓	×	×
Jazmín			×		×

Ni Margarita ni Azucena recibieron los jazmines.

	Margarita	Azucena	Rosa	Violeta	Jazmín
Margarita	×	×	×		×
Azucena		×	×		×
Rosa			×		
Violeta	×	×	✓	×	×
Jazmín			×		×

Completando el cuadro:

	Margarita	Azucena	Rosa	Violeta	Jazmín
Margarita	×	×	×	✓	×
Azucena	✓	×	×	×	×
Rosa	×	×	×	×	✓
Violeta	×	×	✓	×	×
Jazmín	×	✓	×	×	×

Finalmente:

Margarita recibe violetas.
Azucena recibe margaritas.
Rosa recibe jazmines.
Violeta recibe rosas.
Jazmín recibe azucenas.

Problemas resueltos

1 Ángel, Beto, César y Darío son 4 amigos que practican un deporte cada uno: fútbol, vóley, básquet y tenis, no necesariamente en ese orden. Se sabe que:

- Ángel y el voleibolista son vecinos.
- Beto y el basquetbolista se conocen desde pequeños.
- César es primo del tenista.
- Darío no es tenista ni futbolista.
- Beto se ha comprado un par de chimpunes.

¿Qué deporte practica César?

Resolución:

- Ángel y el voleibolista son vecinos.
  Entonces, Ángel no practica vóley.
- Beto y el basquetbolista se conocen.
  Entonces, Beto no es basquetbolista.
- César es primo del tenista.
  Entonces, César no es tenista.
- Darío no es tenista ni futbolista.
- Beto practica vóley.

Ordenamos los datos en una tabla:

	Fútbol	Vóley	Básquet	Tenis
Ángel	×	×	×	✓
Beto	×	✓	×	×
César	✓	×	×	×
Darío	×	×	✓	×

∴ César practica fútbol.

2 4 amigos: Axel, Brian, Charles y Federico viven en 4 distritos.
Se sabe que:

- Brian no vive en Puente Piedra.
- Federico vive en La Molina.
- Axel va a Puente Piedra a visitar a Charles.
- A Brian le gustaría vivir en Surquillo.
- El que vive en Comas es ingeniero.

¿Quién es ingeniero?

Resolución:

- Axel va a Puente Piedra a visitar a Charles.
- Entonces, Axel no vive en Puente Piedra.
- A Brian le gustaría vivir en Surquillo.
- Entonces, Brian no vive en Surquillo.

Ordenamos los datos en una tabla:

	Puente Piedra	La Molina	Surquillo	Comas
Axel	×	×	✓	×
Brian	×	×	×	✓
Charles	✓	×	×	×
Federico	×	✓	×	×

∴ El ingeniero es Brian.

3 Manuel, Nadia, Celso y Dinora son 4 estudiantes universitarios que estudian una carrera cada uno. Se sabe que:

- Manuel quiere cambiarse de la facultad de economía a ciencias políticas.
- Dinora es amiga del estudiante de biología.
- Celso no estudia computación.
- Dinora es prima del estudiante de ciencias políticas.

¿Quién estudia computación?

Resolución:

- Manuel quiere cambiarse de la facultad de economía a ciencias políticas.
  Entonces, Manuel estudia economía.
- Dinora es amiga del estudiante de biología.
  Entonces, Dinora no estudia biología.
- Dinora es prima del estudiante de ciencias políticas.
  Entonces, Dinora no estudia ciencias políticas.

Ordenamos los datos en un cuadro:

	Economía	Ciencias Políticas	Biología	Computación
Manuel	✓	×	×	×
Nadia	×			×
Celso	×			×
Dinora	×	×	×	✓

∴ Dinora estudia computación.

Observación:
No ha sido necesario llenar todo el cuadro, ya que solo nos pedían quién estudia computación.

4 Michael, George, Waldir, Celia y Cristina, son actores en una película de acción. Los papeles a realizar son: policía, víctima, asaltante, juez y chofer. Se sabe que:

- El papel de juez lo hace un hombre.
- Una mujer hace de víctima.
- El papel de juez lo hace una persona mayor.
- Celia y Michael son los más jóvenes.
- Waldir está uniformado durante toda la película.
- Cristina hace de conductora de taxi.

¿Qué papel hizo Michael en la película?

Resolución:

- Cristina hace de conductora de taxi.
  Entonces, Cristina hace el papel de chofer.
- Waldir está uniformado durante toda la película.
  Entonces, Waldir hace el papel de policía.
- Una mujer hace de víctima.
  Entonces, como Cristina hace el papel de chofer, Celia hace el papel de víctima.

Luego:

	Policía	Víctima	Asaltante	Juez	Chofer
Michael	×	×			×
George	×	×			×
Waldir	✓	×	×	×	×
Celia	×	✓	×	×	×
Cristina	×	×	×	×	✓

Sabemos que:

- Celia y Michael son los más jóvenes.
- El papel de juez lo hace una persona mayor.
- El papel de juez lo hace un hombre.

} Entonces el papel de Juez lo hace George

Ordenando los datos en una tabla:

	Policía	Víctima	Asaltante	Juez	Chofer
Michael	×	×	✓	×	×
George	×	×	×	✓	×
Waldir	✓	×	×	×	×
Celia	×	✓	×	×	×
Cristina	×	×	×	×	✓

∴ Michael hace el papel de asaltante.

5 Enrique, Fernando, Gabriel, Humberto, Ismael y Judas, se fueron de viaje a un país diferente cada uno. Los países que visitaron fueron: Nueva Zelanda, Argentina, EE UU, Noruega, Nigeria y Alemania, pero no necesariamente en ese orden. Se sabe que:

- Fernando y Humberto hicieron escala en Argentina, para llegar a su destino final.
- Los únicos que fueron a Europa (Noruega o Alemania) fueron Gabriel y Humberto.
- Ismael, Enrique y el que viajó a Nueva Zelanda, viajaron por la misma línea aérea.
- Ismael, Gabriel y Enrique también hicieron escala en Argentina para llegar a su destino final.
- El que viajó a Nigeria pidió dinero prestado a Ismael y Fernando.
- Gabriel prestó dinero al que viajó a Alemania.

¿Quién viajó a EE UU?

Resolución:

- Fernando y Humberto hicieron escala en Argentina.
  Entonces, ni Fernando, ni Humberto viajaron a Argentina.
- Ismael, Gabriel y Enrique también hicieron escala en Argentina.
  Entonces, ninguno de los 3 viajó a Argentina
  Luego Judas viajó a Argentina.
- El que viajó a Nigeria pidió dinero prestado a Ismael y Fernando.
  Entonces, ni Ismael, ni Fernando viajaron a Nigeria.
- Ismael, Enrique y el que viajó a Nueva Zelanda fueron juntos.
  Entonces, ni Ismael, ni Enrique viajaron a Nueva Zelanda.
- Gabriel prestó dinero al que viajó a Alemania
  Entonces, Gabriel no viajó a Alemania.
- Gabriel y Humberto viajaron a Noruega o Alemania.
  Entonces, Gabriel viajó a Noruega y Humberto a Alemania.

Ordenamos estos datos:

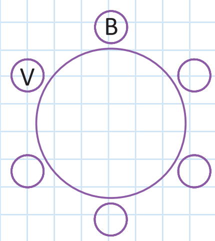
	Nueva Zelanda	Argentina	EE UU	Noruega	Nigeria	Alemania
Enrique	×	×	×	×	✓	×
Fernando	✓	×	×	×	×	×
Gabriel	×	×	×	✓	×	×
Humberto	×	×	×	×	×	✓
Ismael	×	×	✓	×	×	×
Judas	×	✓	×	×	×	×

∴ Ismael viajó a EE UU.

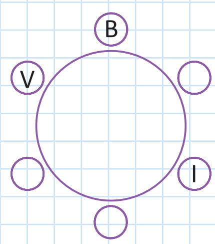
6 En una mesa circular se han sentado, simétricamente 6 futbolistas. Si Albarracín no está sentado al lado de Beltrán ni de Cubas, Durand no está al lado de Ibáñez ni de Cubas, Vidales está junto y a la derecha de Beltrán, Ibáñez está sentado frente a Vidales. ¿Quién está sentado junto y a la izquierda de Durand?

Resolución:

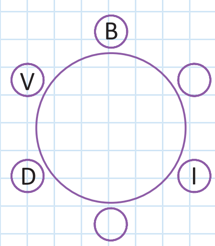
- Vidales está junto y a la derecha de Beltrán.



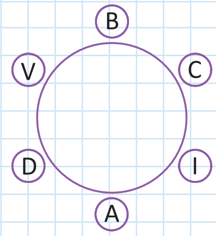
- Ibáñez está sentado frente a Vidales.



- Durand no está al lado de Ibáñez ni de Cubas.



- Albarracín no está sentado al lado de Beltrán

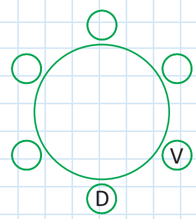


∴ Vidales está sentado junto y a la izquierda de Durand.

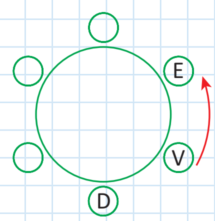
7 En una mesa se han sentado simétricamente distribuidos 6 matemáticos: Einstein no está sentado junto a Newton ni Gauss, Descartes no está sentado junto a Newton, ni junto a Fibonacci, Villarreal está sentado junto y a la derecha de Descartes, Einstein está sentado a la derecha de Villarreal. ¿Quién está sentado junto y a la derecha de Fibonacci?

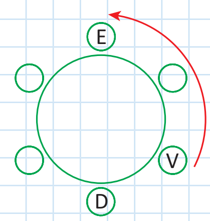
Resolución:

- Villarreal está sentado junto y a la derecha de Descartes.

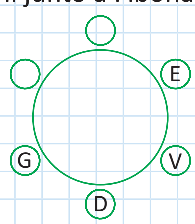


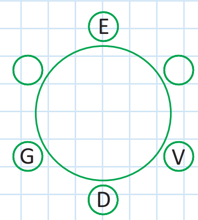
- Einstein está sentado a la derecha de Villarreal, entonces existen 2 posibilidades.



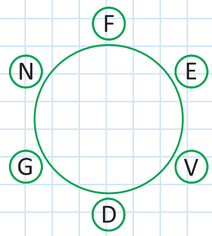


- Descartes no está sentado junto a Newton ni junto a Fibonacci.





- Einstein no está sentado junto a Newton ni Gauss, entonces el segundo caso no cumple.



∴ Newton está sentado junto y a la derecha de Fibonacci.

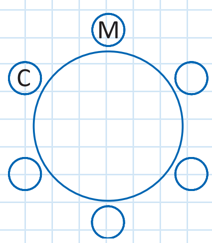
8 6 amigos: Miguel, Nicolás, Cecilia, Dayana, Elisa y Fernando se sientan alrededor de una mesa circular con 6 asientos distribuidos simétricamente. Se sabe que:

- Nicolás y Elisa no se sientan juntos.
- Miguel y Elisa se sientan juntos.
- Fernando se sienta frente a Miguel.
- Cecilia se sienta junto y a la derecha de Miguel.
- Cecilia está frente a Dayana.

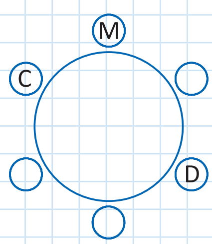
¿Quiénes se sientan a la derecha de Dayana?

Resolución:

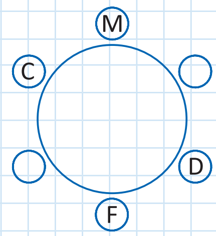
- Cecilia se sienta junto y a la derecha de Miguel.



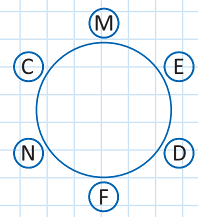
- Cecilia está frente a Dayana.



- Fernando se sienta frente a Miguel.



- Miguel y Elisa se sientan juntos.



∴ A la derecha de Dayana se sientan Elisa y Miguel.

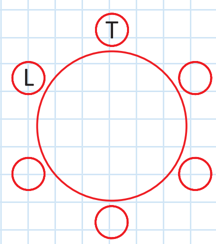
9 En una mesa circular hay 6 asientos simétricamente colocados. Se ubican 6 amigos para hablar de deportes. Se sabe que:

- Chicho y Pipo no se sientan junto a Toto.
- Lucho se sienta junto y a la derecha de Toto.
- Quique no se sienta junto a Toto ni a Dino.
- Pipo y Dino no se sientan junto a Chicho.

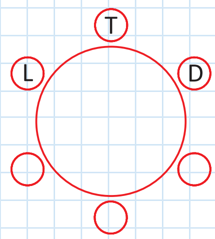
¿Quiénes se sientan a la izquierda de Toto?

Resolución:

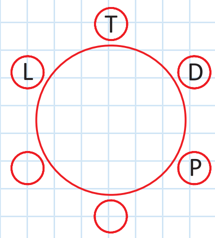
- Lucho se sienta junto y a la derecha de Toto.



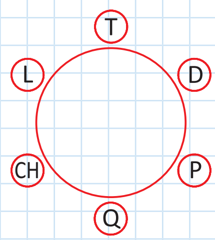
- Chicho y Pipo no se sientan junto a Toto, además Quique tampoco se sienta junto a Toto, entonces quien se sienta junto a Toto es Dino.



- Quique no se sienta junto a Dino, además Chicho tampoco se sienta junto a Dino, entonces Pipo se sienta junto a Dino.



- Pipo no se sienta junto a Chicho. Entonces, Quique se sienta junto a Pipo.



∴ A la izquierda de Toto se sientan Dino y Pipo.

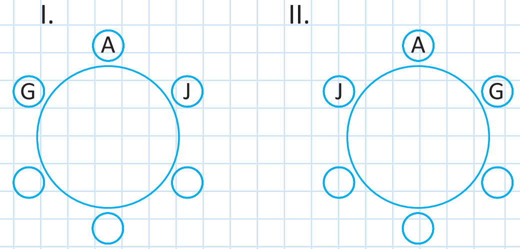
10 3 peruanos: Félix, Jesús y Gonzalo se reúnen con 3 chilenos: Ramiro, Armando y Lucas; se ordenan alrededor de una mesa circular con 6 asientos distribuidos simétricamente. Se sabe que:

- Los que tienen la misma nacionalidad, no se sientan juntos.
- Armando está entre Gonzalo y Jesús.
- Ramiro está a la derecha de Gonzalo.

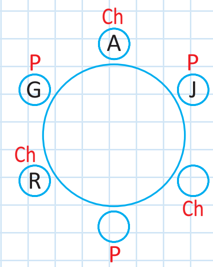
¿Quién está frente a Lucas?

Resolución:

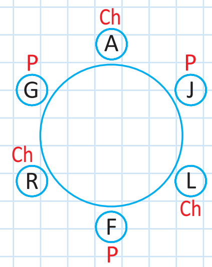
- Armando está entre Gonzalo y Jesús. Existen 2 casos:



- Ramiro está a la derecha de Gonzalo. Entonces se descarta el segundo caso.



- Completando se tiene:



P: peruano

Ch: chileno

∴ Gonzalo está frente a Lucas.

Actividades de razonamiento

1. Cinco amigos están sentados uno al lado del otro, en una fila. Se sabe que:
- Vilma se sienta a la izquierda de José.
- Eder está a la derecha de Dante.
- Adrián está junto y a la derecha de José y, además, está junto a Dante.

¿Quién está en el extremo derecho?

A) Vilma B) José C) Dante D) Eder E) Adrián

2. Se tiene un edificio de 4 pisos y en cada piso vive una familia. La familia Peña vive un piso más arriba que la familia Iturriaga, la familia Elguera habita más arriba que los Solari, y los Peña viven más abajo que los Solari. ¿En qué piso viven los Peña y los Solari respectivamente?

A) 1 y 3 B) 2 y 3 C) 3 y 4 D) 2 y 4 E) 1 y 4

3. Entre los socios de una empresa; "A" tiene menos capital que "B"; "B" tiene más capital que "C", pero menos que D". ¿Cuál de las afirmaciones es cierta?

A) A tiene menos capital que C.
B) A tiene más capital que D.
C) A tiene más capital que C.
D) A tiene menos capital que D.
E) A tiene igual capital que C.

4. Sabiendo que:
- Sara es más alta que Raquel.
- Rosa es más baja que Raquel y que Maritza.
- Luisa es más alta que las demás, excepto que Maritza.

Podemos afirmar:
I. Sara es más alta que Rosa.
II. Luisa es más alta que Sara.
III. Rosa es más baja que Raquel.

A) I y III B) Solo I C) Todas
D) Solo II E) I y II

5. Cuatro amigos se reunen y se sientan alrededor de una mesa redonda con 4 sillas distribuidas simétricamente. Sabemos que:
- Juan se sienta junto y a la derecha de Luis.
- Pedro no se sienta junto a Luis.
- José les comentó lo entretenido que está la reunión.

¿Quién está sentado frente a Pedro?

A) Juan B) Faltan datos C) Marco
D) José E) Luis

6. Si sabemos que:
- Jorge es 3 cm más alto que Manuel.
- Nataly es 2 cm más baja que Manuel.
- Raúl es 5 cm más bajo que Jorge.
- Vanessa es 3 cm más baja que Manuel.

Podemos afirmar que:
I. Raúl y Nataly son de la misma talla.
II. Vanessa es la más baja.
III. Manuel es el más alto.

A) Todas B) I y II C) I D) II y III E) I y III

7. Seis amigas se sientan distribuidas simétricamente alrededor de una mesa circular, tal que: María no está al lado de Carmen ni de Juana. Teresa está a la derecha de Rosa. Inés no está al lado de Rosa ni de Juana. Rosa no está al lado de Carmen ni de María. ¿Quién está sentada junto y a la izquierda de Rosa?

A) Teresa B) Juana C) Carmen D) María E) Inés

8. Se encuentran 4 amigos profesionales: Germán, Marcos, Enrique y Alberto, que son: profesor, ingeniero, abogado y médico, aunque no necesariamente en ese orden. Se sabe que:

I. Germán está casado con la hermana del ingeniero.
II. Marcos y el médico van a trabajar con el ingeniero.
III. Los solteros son Enrique y el profesor; además, ellos son hijos únicos.
IV. Marcos y Alberto son amigos del abogado, quien está comprometido.

¿Quiénes son el abogado y el médico respectivamente?

A) Germán-Marcos B) Alberto-Enrique C) Germán-Enrique D) Marcos-Alberto E) Alberto-Germán

9. Mario, Luis e Iván viven en 3 ciudades diferentes: Lima, Cuzco y Tacna, estudiantes una carrera distinta: Educación, Derecho y Arquitectura. Si se sabe que:

– Mario no vive en Cuzco
– Luis no viven Tacna
– El que vive en Cuzco no estudia Derecho
– Quién vive en Tacna estudia Arquitectura
– Luis no estudia Educación

¿Dónde vive Iván y qué estudia?

A) Lima - Arquitectura B) Lima - Educación C) Lima - Derecho D) Cuzco - Educación E) Tacna - Derecho

10. Tres hermanos estudian en cada una de las siguientes universidades: San Marcos, Villarreal y UNI, carreras diferentes: ingeniería industrial, ingeniería mecánica y economía. Julio no estudia en San Marcos y Daniel no está en la Villarreal, el que está en San Marcos no estudia Ing. Industrial, el que está en Villarreal estudia Ingeniería Mecánica. Daniel no estudia Economía, se quiere saber qué estudia Ricardo y dónde estudia.

A) Economía - San Marcos B) Economía - Villarreal C) Ing. mecánica - UNI
D) Economía - UNI E) Ing. mecánica - San Marcos

11. En una mesa circular con seis asientos simétricamente colocados, se sientan seis amigos para almorzar. Si Luis no está sentado el lado de César ni de Raúl; Pancho no está al lado de César ni de Mario, Antonio está junto y a la derecha de Pancho. Además, al frente de Antonio no se sienta Mario. ¿Quién está junto y a la derecha de Mario?

A) Pancho B) Raúl C) César D) Mario E) Antonio

12. Cuatro amigos: Nora, Martha, Irene y Leticia se sientan alrededor de una mesa circular que tiene 5 sillas. Si sabemos que:

– Junto a Martha e Irene hay un asiento vacío.
– Leticia no se sienta junto a Irene.

Son verdaderas:

I. Martha se sienta junto a Nora.
II. Leticia se sienta junto a Nora.
III. Nora se sienta junto a Irene.

A) Todas B) I y III C) II y III D) Solo II E) Solo I

13. Tres amigas: Lucía, Chela y Victoria cumplen años los días 9; 12 y 16 durante los meses de abril, octubre y diciembre, aunque no necesariamente en ese orden. Se sabe que:

I. El 12 de octubre ninguna de ellas cumple años.
II. Chela celebra su cumpleaños el 15 de diciembre, con un día de anticipación de la fecha real.
III. El 16 de abril ninguna cumple años.
IV. Victoria no nació en octubre.

¿Cuándo es el cumpleaños de Lucía?

A) 9 de octubre B) 12 de diciembre C) 16 de octubre D) 9 de abril E) 16 de diciembre

14. Tres amigas: Karin, Giovanna y Milagros, viven en 3 distritos diferentes: Miraflores, Breña y Surco, aunque no necesariamente en ese orden. Ellas se movilizan usando un medio de transporte distinto: auto petrolero, camioneta y auto gasolinero. Se sabe que:

I. Cuando Giovanna se compre una camioneta visitará Surco.
II. Desde que Milagros vive en Breña vendió su auto gasolinero.
III. La que vive en Miraflores tiene 2 autos petroleros.

¿En qué distrito vive Karin y qué transporte usa?

A) Miraflores-auto gasolinero B) Surco-auto gasolinero C) Breña-camioneta
D) Breña-auto petrolero E) Surco-camioneta

Claves

1. D	5. E	9. D	13. A
2. B	6. B	10. A	14. B
3. D	7. B	11. C	
4. C	8. C	12. C	

Reto



En un examen, "A" tiene menos nota que "B"; "B" tiene más nota que "C", pero menos que "D". ¿Cuál de las conclusiones es correcta?

A) A tiene menos nota que C.
B) A tiene más nota que D.
C) A tiene más nota que C.
D) A tiene menos nota que D.
E) A tiene igual nota que C.

Rpta.: "A" tiene menos nota que "D".

Refuerza practicando

NIVEL 1

Las alumnas Kelly, Carol y Susan gustan de los cursos de Aritmética, Historia y Razonamiento matemático, aunque no necesariamente en ese orden. Kelly salió desaprobada en Aritmética y a Susan no le gustan los números.

1. ¿A quién le agrada el curso de Razonamiento matemático?

   A) A Kelly B) A Susan C) A Carol
   D) A todas E) A ninguna

2. ¿Qué curso le agrada a Carol?

   A) Historia B) Geografía C) Álgebra
   D) Aritmética E) Raz. matemático

En un colegio hay tres profesores: Ángel, Bernardo y César que enseñan los cursos de Geografía, Historia y Lenguaje, aunque no necesariamente en ese orden. Se sabe que Ángel es amigo del profesor de Historia y César no enseña Geografía ni Historia.

3. ¿Quién enseña Historia?

   A) Bernardo B) Ángel C) César
   D) Carlos E) Beto

4. ¿Qué curso enseña Ángel?

   A) Geografía B) Literatura C) Historia
   D) Matemática E) Lenguaje

Tres hermanos cuyos nombres son Jorge, Pepe y Jaime cumplen años los meses de febrero, marzo y septiembre, los días 26; 16 y 21 (no necesariamente en ese orden). Se sabe que:



- El cumpleaños de Jaime es en el primer semestre del año.
- En su cumpleaños, Jorge hizo una fiesta de carnavales.
- Ninguno cumple años el 16 de febrero.
- El día 21, Jaime cumple años.

5. ¿Qué día es el cumpleaños de Jorge?

   A) 9 B) 16 C) 26
   D) 15 E) 21

6. ¿Quién cumple años el 16 de septiembre?

   A) Jorge B) Jaime C) Pepe
   D) Julio E) Raúl

7. ¿Qué día y mes es el cumpleaños de Jorge?

   A) 26 de febrero B) 21 de marzo
   C) 21 de febrero D) 16 de marzo
   E) 26 de septiembre

8. ¿Quién cumple años el segundo bimestre del año?

   A) Jorge B) Jaime C) Juan
   D) Pepe E) Raúl

9. A todos los integrantes de la delegación peruana de atletismo les están haciendo unos chequeos respectivos. Se sabe que:



   I. Raúl es 6 cm más alto que Benito.
   II. Julissa es 6 cm más baja que Benito.
   III. Pacho es 8 cm más bajo que Raúl.
   IV. Alejandra es 5 cm más baja que Pacho.

   Indica cuál es la alternativa verdadera.

   A) Raúl es el más alto.
   B) Benito es 2 cm más alto que Pacho.
   C) Alejandra es la más baja de todas.
   D) Pancho es más alto que Julissa.
   E) Todas las anteriores son verdaderas.

NIVEL 2

Seis amigos están jugando monopolio en una mesa circular con 8 asientos distribuidos simétricamente. Además se sabe:

– Son tres parejas y todas ellas se sientan juntas, excepto Ana María que está junto a su hermano Carlos.
– La esposa de Carlos es Beatriz.
– Los asientos vacíos no deben estar juntos.
– Raúl está situado junto y a la derecha de Jorge.
– Al costado izquierdo de Teresa hay un asiento vacío.

10. ¿A la derecha de quién está el otro asiento vacío?

   A) Ana María B) Carlos C) Raúl
   D) Beatriz E) Ninguno

11. ¿Con quién tendrá que intercambiar asiento Ana para sentarse al lado de su esposo?

   A) Teresa B) Carlos C) Jorge
   D) Beatriz E) Raúl

12. Si se desea que Raúl se siente junto a Beatriz, ¿con quién debe intercambiar asiento?

   A) Ana María B) Teresa C) Jorge
   D) Carlos E) Con nadie

13. Si Beatriz se retira, ¿qué sucede?
   A) Carlos se sienta junto a los lugares vacíos.
   B) Dos asientos vacíos estarían juntos.
   C) Teresa estaría junto a Ana María.
   D) Ana María está junto a los lugares vacíos.
   E) Teresa está junto a Raúl y Carlos.

14. Si Ana María está a la izquierda de Carlos, entonces se cumple que:
   A) Teresa está frente a Carlos.
   B) Raúl está frente a Ana María.
   C) Beatriz está junto a un lugar vacío.
   D) Jorge está frente a Raúl.
   E) Todas las parejas se sientan juntas.

15. Un edificio tiene 6 pisos, y seis compañías A, B, C, D, E y F ocupan los seis pisos, una compañía en cada piso. Se sabe que:



   – C está a tantos pisos de B como B está de A.
   – B y E no están en pisos adyacentes.
   – F está más arriba que D.
   – A está en el quinto piso.

   ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. B debe estar en el tercer o cuarto piso.
II. D debe estar en el primer o segundo piso.
III. F debe estar en el cuarto o quinto piso.

A) I y II B) II y III C) I y III
D) Solo I E) Solo II

16. Alex invita a cenar a sus amigos: Heber, Luis, Janet, Yisela y Jimmy; este último por razones de fuerza mayor no pudo asistir. Se sientan alrededor de una mesa circular con seis asientos distribuidos simétricamente.



Alex se sienta junto a Heber y Luis.
Frente a Heber se sienta Janet.
Junto a un hombre no se encuentra el asiento vacío.
¿Entre quiénes se sienta Heber?

A) Alex y Yisela B) Luis y el asiento vacío
C) Yisela y Luis D) Yisela y Janet
E) Luis y Janet

17. Mely vive en un edificio de dos pisos, cuyos inquilinos tienen una característica muy especial: los que viven en el 1.er piso siempre dicen la verdad y los que viven en el 2.° piso siempre mienten. Mely se encontró en una oportunidad con un vecino y al llegar a su casa le dijo a su padre: "El vecino me ha dicho que vive en el 2.° piso". ¿En qué piso vive Mely?

A) Primero B) Segundo C) Sótano
D) No se sabe E) Azotea

18. Cinco automóviles P, Q, R, S y T son comparados de acuerdo a su costo y a su tiempo de fabricación. Si:
- P es menos caro que R y menos moderno que Q.
- Q es más caro que P y más moderno que S.
- R es más caro que T y más moderno que S.
- S es menos caro que P y más moderno que T.
- T es más caro que Q y más moderno que P.

¿Cuál de los autos es más caro que P y más moderno que T?

A) Solo Q B) Solo R C) Solo S D) Q y R E) R y S

NIVEL 3

19. Ana, Ben, Cam y Don llevan polos con una letra y un número en su espalda. Los números son 2; 4; 6 y 8, y las letras A; B; C y D. Además, se sabe que:
- El número que va con la letra C es el doble del número de Cam.
- La letra de Cam aparece en su nombre.
- La dirección de Don es el número de Don menos el número de Ben.
- El número de Ana es la dirección de Don.
- La posición de la letra de Ben en el alfabeto (por ejemplo C es 3) es mayor que el número de Ben.

¿Cuál es el número y la letra de Ana?

A) 8; A B) 2; B C) 6; B
D) 6; A E) 4; B

20. Se sabe que:
- Juan es menor que Jorge.
- Jesús es mayor que Javier, pero menor que Jaime.
- Jacinto es menor que Julio.
- Jesús no es menor que Jacinto.
- Jesús no es mayor que Jorge.

Por lo tanto, podemos afirmar que:

A) Juan es mayor que Jacinto.
B) Jorge es mayor que Julio.
C) Javier no es mayor que Julio.
D) Julio es menor que Jaime.
E) Javier es menor que Jorge.

21. Seis amigos Carmen, Rosa, Vanesa, Luis, Renzo y Pablo, van al teatro y ocupan una fila de siete asientos. La ubicación de los amigos en la fila cumple las siguientes condiciones:
– Las personas del mismo sexo no se sientan juntas.
– Carmen está sentada en el extremo derecho de la fila.
– Pablo está sentado entre Luis y Rosa, y a la derecha de Vanesa.
– Renzo está sentado a la izquierda de Luis, y este último junto a Carmen.

¿Cuál(es)de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I. Vanesa está sentada en el extremo izquierdo.
II. Rosa está sentada entre Renzo y Pablo.
III. Pablo está sentado junto al sitio vacío.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) II y III

22. Ocho personas se encuentran haciendo cola en un cine. Todas están mirando hacia la ventanilla, una detrás de la otra. Cada persona usa un sombrero de un color y puede ver el color de los sombreros que usan las personas que están delante, pero no de las que están detrás, ni el suyo; lógicamente la primera persona no puede ver ningún sombrero. Cada una en la cola sabe que en el grupo hay 5 sombreros azules, 2 rojos y 1 verde, que la sexta persona en la cola usa un sombrero rojo y que no es posible que 2 personas consecutivas usen sombreros rojos. Si la octava persona en la cola usa sombrero verde, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?



I. La séptima persona usa un sombrero azul.
II. La cuarta persona puede ver un sombrero azul.
III. La sexta persona puede ver un sombrero rojo.

A) I y II B) II y III C) I y III
D) Solo I E) Todas

23. Ocho amigos: Anaís, Blanca, Diana, Helga, Carlos, Ever, Franco y Guido se sientan alrededor de una mesa circular cuyos ocho asientos se encuentran distribuidos simétricamente, y se sabe que:
– Anaís se sienta adyacente a Franco y Ever.
– Diana no se sienta junto a Blanca.
– Carlos se sienta al frente de Franco.
– Helga se sienta al frente de Blanca.
– Guido no se sienta junto a Carlos.

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I. Al menos un hombre se sienta frente a una mujer.
II. Al menos dos mujeres se sientan juntas.
III. No hay dos mujeres que se sientan juntas.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) I y III

24. Tras las elecciones municipales para designar al coordinador del Vaso de Leche, varios representantes de AB, CD, EF y GH se reunieron en una cena de fraternidad política. El número de los comensales no era muy afortunado: 13 en total. Además, se daban las siguientes circunstancias:

1. Los comensales de AB más los de CD sumaban 5.
2. Los comensales de AB más los de EF sumaban 6.
3. Los comensales del partido ganador en las elecciones eran 2.
4. Los comensales de AB más los de GH sumaban 10.

¿Qué partido ganó dichas elecciones?

A) AB B) CD C) EF
D) GH E) Faltan datos

25. Al comienzo de un campeonato de desafíos de ajedrez, seis competidores: F, G, H, I, J y K, son ubicados por sorteo en uno de los seis puestos, siendo el primer puesto el mejor ubicado y el sexto puesto el peor ubicado. Los resultados del sorteo cumplen las siguientes condiciones:



- F está mejor ubicado que G.
- J está mejor ubicado que H y que I.
- K está dos puestos arriba de H.
- F está ubicado en el tercer o cuarto puesto.
- Cada competidor debe ocupar un puesto diferente.

Durante el torneo, un jugador puede desafiar solamente al jugador ubicado inmediatamente arriba suyo o al jugador ubicado dos lugares arriba suyo.

Si F empezó el torneo en tercer lugar, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) J empezó el torneo en primer lugar.
B) K empezó el torneo en segundo lugar.
C) G empezó el torneo en quinto lugar.
D) I empezó el torneo en segundo lugar.
E) I empezó el torneo en sexto lugar.

26. Cuatro hermanos: Juan, Alicia, Martha y Julio juegan a las cartas en una mesa redonda. Alicia está a la derecha de Julio; Martha no está junto a Alicia. Indica el valor de verdad de las proposiciones:

I. Juan está a la derecha de Alicia.
II. Martha a la izquierda de Juan.
III. Julio está frente a Juan.
IV. Alicia está frente a Martha.

UNI 2012-II

A) VVV B) VFVV C) VFFV
D) VFFF E) FFFF

27. De tres amigas se tiene la siguiente información:

- Belinda no se apellida Garcés.
- La señorita Torres es psicóloga.
- Katty es contadora.
- La dentista no se apellida Méndez.
- Atenas es bien coqueta.

El nombre y apellido correcto es:

A) Belinda Torres B) Atenas Méndez
C) Katty Torres D) Belinda Méndez
E) Katty Garcés

28. Jaime, Carlos, Alberto y Juan nacieron en años distintos: 1982; 1983; 1985 y 1987, no necesariamente en ese orden. Si se sabe que el menor no es ni Jaime ni Juan, y que Jaime es tres años menor que Alberto, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A) Carlos nació en 1982.
B) Jaime nació en 1983.
C) Carlos nació en 1987.
D) Juan nació en 1985.
E) Alberto nació en 1985.

Claves

NIVEL 1	8. B	15. A	22. E
1. A	9. E	16. A	23. C
2. D	NIVEL 2	17. B	24. C
3. A	10. C	18. D	25. A
4. A	11. C	NIVEL 3	26. B
5. C	12. D	19. C	27. A
6. C	13. B	20. E	28. C
7. A	14. C	21. C	

UNIDAD 3



TABLA DEL IMO - SUDAMÉRICA				
AÑO	2010	2011	2012	2013
1.er lugar	Perú (18.°)	Brasil (20.°)	Perú(16.°)	Perú (26.°)
2.° lugar	Brasil (35.°)	Perú (31.°)	Brasil (19.°)	Brasil (28.°)
3.er lugar	Argentina (39.°)	Argentina (49.°)	Colombia (46.°)	Colombia (48.°)

Perú en la Olimpiada Internacional de Matemática

La Olimpiada Internacional de Matemática (IMO por sus siglas en inglés) reúne anualmente a los mejores matemáticos del mundo menores de 20 años y que no hayan terminado aún la educación secundaria. Las reglas indican que cada país participará con un grupo de 6 estudiantes los cuales resolverán un total de 6 problemas en 2 días en un lapso de 4 horas y media por día, cada pregunta tendrá un puntaje máximo de 7 puntos. Perú participará por primera vez el año 1987, logrando hasta la fecha 3 medallas de oro, 20 medallas de plata, 32 de bronce y 29 menciones honoríficas. Cabe indicar que el segundo participante más joven de la historia en obtener una medalla es para el peruano Raúl Chávez Sarmiento (el más pequeño en la foto) quien obtuvo una medalla de bronce con tan solo 11 años de edad en la IMO del 2009 realizada en Alemania.

Matemática recreativa

¿Paradoja matemática o simplemente aritmética?

Tres amigos van al restaurante y consumen entre los tres por un monto de S/.25,00. Al terminar, cada uno quiere pagar la cuenta, por lo que el mesero toma la iniciativa y acepta de cada uno un billete de S/.10,00.

Lleva los S/.30,00 al cajero quien le devuelve cinco monedas de S/.1,00.

Cuando regresa a la mesa entrega una moneda de S/.1,00 a cada amigo y coloca las dos restantes sobre la mesa. Los tres amigos están de acuerdo en darle al mesero esos dos soles de propina y así lo hacen.

De regreso al coche uno de los amigos exclama: –¡Hey!, un momento, ¿cuánto gastamos en el restaurante?

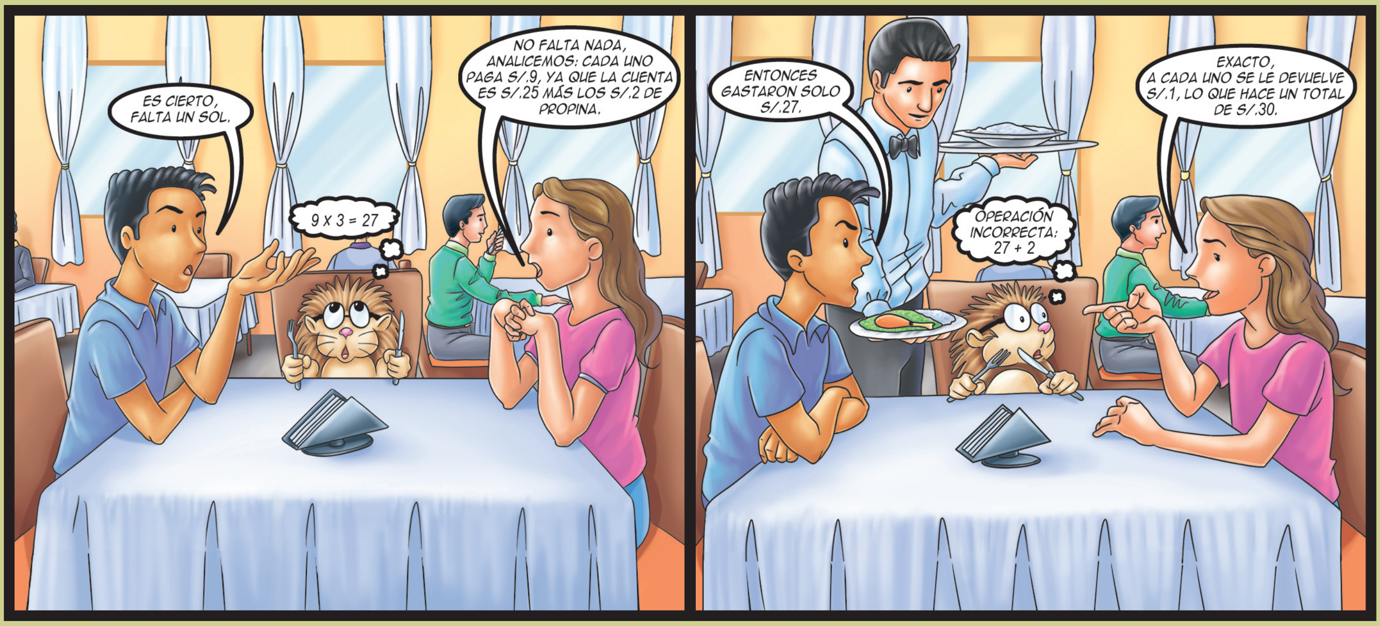
Sencillo, –exclamó otro– si cada uno de nosotros dio S/.10,00 y nos devolvieron S/.1,00, pagamos (10 – 1) . 3 = 27, más S/.2,00 de la propina hacen S/.29,00.

–¿Por qué falta un sol?– Preguntó el tercero –¡regresemos!

No hay engaño en la formulación, pero aparentemente según lo mires puede faltar un sol.



DIÁLOGO



Sucesiones

CONCEPTO

Diremos sucesión, a todo conjunto ordenado de elementos (números, letras o gráficos), tal que cada uno ocupa un lugar establecido.

CLASES DE SUCESIONES

Sucesiones gráficas

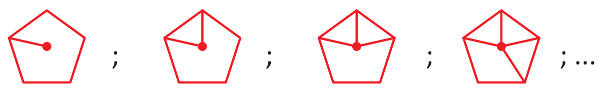
Ejemplos:

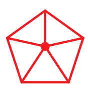
1. Determina la figura que sigue en:



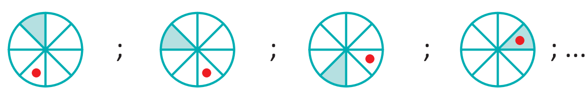
Respuesta: 

2. ¿Qué figura continúa en la sucesión?



Respuesta: 

3. ¿Qué figura continúa en la siguiente sucesión?



Respuesta: 

Sucesiones literales

Ejemplos:

1. ¿Qué letra continúa?

D; H; L; O; (S)

E	I	M	P
F	J	N	Q
G	K	Ñ	R

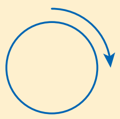
2. ¿Qué letra sigue en la sucesión?

V; S; P; N; (K)

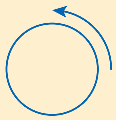
T	Q	Ñ	L
U	R	O	M

Recuerda

Sentido convencional de giro:



Sentido horario



Sentido antihorario



Atención

El alfabeto también se puede ordenar en sentido opuesto, así:

Z; Y; X; W; V; U; T; S; R; Q; P; O; Ñ; N; M; L; K; J; I; H; G; F; E; D; C; B; A.



3. ¿Qué letra sigue en la sucesión?

W; T; P; N; (J)

U	Q	Ñ	K
V	R	O	L
	S		M

Sucesiones numéricas

Sucesión polinomial de primer orden o sucesión lineal

También conocida como progresión aritmética (PA). Se caracteriza por tener razón constante (r) y se calcula como la diferencia de dos términos consecutivos.

Ejemplo:

1.°	2.°	3.°	4.°	5.°
6	10	14	18	22

+4 +4 +4 +4 ⇒ Razón (r) = 4

Luego:

$t_1 = 6 \Rightarrow t_1 = 6 + 4(0)$

$t_2 = 10 \Rightarrow t_2 = 6 + 4(1)$

$t_3 = 14 \Rightarrow t_3 = 6 + 4(2)$

$t_4 = 18 \Rightarrow t_4 = 6 + 4(3)$

$t_5 = 22 \Rightarrow t_5 = 6 + 4(4)$

⋮

$t_n = ? \Rightarrow t_n = 6 + 4(n - 1)$

En general:

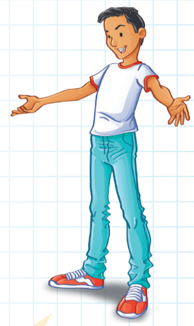
El término enésimo (t_n) de una progresión aritmética se calcula así:

$$t_n = t_1 + (n - 1)r$$

Donde:

r: razón n: número de términos

t_1: primer término t_n: término enésimo



Observación

Ejemplo:

Calcula el término enésimo en:

7; 11; 15; 19; 23; ...

+4 +4 +4 +4

r = 4; $t_1 = 7$

$t_n = 7 + 4(n - 1)$

$t_n = 7 + 4n - 4$

$\therefore\ t_n = 4n + 3$

Sucesión polinomial de segundo orden o sucesión cuadrática

Son aquellas sucesiones en las cuales la razón constante aparece en segunda instancia o segundo orden y su término enésimo tiene la forma de un polinomio de segundo grado, así:

$$t_n = an^2 + bn + c$$

Hallando a; b y c.

Sea la sucesión de 2.° orden: $t_1; t_2; t_3; t_4; ...$

Calculando t_0 y sus razones:

t_0 ; t_1; t_2, t_3; t_4

1.er orden ⟶ P_0 P_1 P_2 P_3

2.° orden ⟶ r r r

$\Rightarrow a = \frac{r}{2};\ b = P_0 - a;\ c = t_0$



Observación

Ejemplo:

Calcula el término enésimo de:

(1) 3; 7; 13; 21; 31; ...

(+2) +4 +6 +8 +10

(+2) +2 +2 +2

$a = \frac{2}{2} = 1$

$b = 2 - 1 = 1$

$c = 1$

$\therefore\ t_n = n^2 + n + 1$

Problemas resueltos

1 Halla el número que sigue:

3; −9; 36; −180; 1080; ...

Resolución:

3; −9; 36; −180; 1080; ◯

×(−3) ×(−4) ×(−5) ×(−6) ×(−7)

−1 −1 −1 −1

∴ El número que sigue es:
1080 × (−7) = −7560

2 ¿Qué número sigue en la sucesión?

−3; 3; 7; 7; 1; ...

Resolución:

−3; 3; 7; 7; 1; ◯

+6 +4 +0 −6 −14

−2 −4 −6 −8

−2 −2 −2

∴ El número que sigue es: 1 − 14 = −13

3 ¿Qué letra sigue en la sucesión?

H; K; Ñ; Q; U; ...

Resolución:

En este tipo de problemas se debe observar la cantidad de letras que existen entre 2 letras consecutivas:

H; K; Ñ; Q; U; ◯

I L O R V
J M P S W
N T

2 3 2 3 2

∴ La letra que sigue es X.

4 ¿Qué letra sigue en la sucesión: F; E; C; B; Z; ...

Resolución:

Veamos la cantidad de letras que hay entre dos letras consecutivas.

F; E; C; B; Z; ◯

D A

0 1 0 1 0

∴ La letra que sigue es Y.

5 Halla la letra y número que sigue en la sucesión:

L; 8; O; 13; R; 20; T; 29

Resolución:

Como se observan números y letras debemos encontrar una relación para los números y otra para las letras.

+5 +7 +9 +11

L; 8; O; 13; R; 20; T; 29; ..... ; .....

M P S
N Q
Ñ

3 2 1 0

∴ La letra que sigue es "U".

El número que sigue es: 29 + 11 = 40

6 En la sucesión: −4; 2; 8, 14; 20; ...

¿Qué lugar ocupa el número 590?

Resolución:

−4; 2; 8; 14; 20; ...

+6 +6 +6 +6

Sea el k-ésimo término que ocupa el número 590.

$a_k = a_1 + (k-1)r$

$590 = -4 + (k-1)6$

$594 = (k-1)6$

$99 = k - 1 \Rightarrow k = 100$

∴ Ocupa el lugar 100.

7 Halla la ley de formación de la siguiente sucesión y luego calula: $t_{50} + t_{60}$
8; 20; 36; 56; ...

Resolución:

Se trata de una sucesión cuadrática:
$t_n = an^2 + bn + c$

$t_0 \longrightarrow$ 0 8; 20; 36; 56; ...

$P_0 \longrightarrow$ +8 +12 +16 +20

$r \longrightarrow$ +4 +4 +4

Hallamos a; b y c:

$a = \frac{r}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow a = 2$

$b = P_0 - a = 8 - 2 \Rightarrow b = 6$

$c = t_0 \Rightarrow c = 0$

Luego: $t_n = 2n^2 + 6n$

Hallamos t_{50}:

$t_{50} = 2(50)^2 + 6(50)$

$t_{50} = 5000 + 300$

$t_{50} = 5300$

Hallamos t_{60}:

$t_{60} = 2(60)^2 + 6(60)$

$t_{60} = 7200 + 360$

$t_{60} = 7560$

Piden:

$t_{50} + t_{60} = 5300 + 7560 = 12\,860$

8 Halla el valor de "x" en la siguiente sucesión aritmética:

5; (20 – 2a); ...; (2a + 40); 11x

Resolución:

En toda sucesión aritmética la diferencia de dos términos consecutivos es constante.

Luego:

$$(20 - 2a) - 5 = 11x - (2a + 40)$$
$$15 - 2a = 11x - 2a - 40$$
$$55 = 11x$$
$$\therefore\ x = 5$$

9 Halla el cuadragésimo término de la siguiente sucesión:
1; 5; 11; 19; ...

Resolución:

Se trata de una sucesión cuadrática:
$t_n = an^2 + bn + c$

$t_0 \longrightarrow$ –1 1; 5; 11; 19; ...

$P_0 \longrightarrow$ +2 +4 +6 +8

$R \longrightarrow$ +2 +2 +2

Hallamos a; b y c:

$a = \frac{r}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow a = 1$

$b = P_0 - a = 2 - 1 \Rightarrow b = 1$

$c = t_0 \Rightarrow c = -1$

Luego: $t_n = n^2 + n - 1$

Piden: $t_{40} = 40^2 + 40 - 1$

$= 1600 + 40 - 1$

$\therefore\ t_{40} = 1639$

10 En la siguiente sucesión geométrica:
m; (m + 14); 9m; ...
Calcula la suma de cifras del 3.er término.

Resolución:

En toda sucesión geométrica el cociente de dos términos consecutivos es constante

$$\frac{m + 14}{m} = \frac{9m}{m + 14}$$

Luego:

$m^2 + 28m + 196 = 9m^2$

$8m^2 - 28m - 196 = 0$

$2m^2 - 7m - 49 = 0$

2m +7
m –7 $\Rightarrow m = 7$

Luego: $t_3 = 9(7) = 63$

Piden la suma de cifras: 6 + 3 = 9

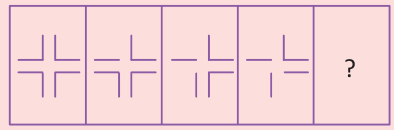
Actividades de razonamiento

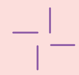
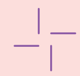
1. Calcula n.

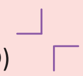
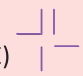
2; 3; 6; 11; 18; n

A) 25 B) 23 C) 24
D) 27 E) 22

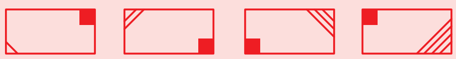
2. Determina la figura que continúa:



A)  B)  C) 

D)  E) 

3. Determina la figura que continúa:



A)  B)  C) 

D)  E) 

4. Halla el término enésimo de:

x; 7, 11; 15; ...

A) $4n - 2$ B) $4n + 1$ C) $4n - 1$
D) $4n + 3$ E) $4n + 7$

5. Halla el t_{10} en:

-1; 3; 7; 11; 15; ...

A) 33 B) 30 C) 2
D) 37 E) 35

6. ¿Qué letra continúa?

B; D; G; K; O;

A) S B) Q G) P
D) U E) T

7. Halla $x - y$.

8; 11; 18; 21; 28; y; x

A) 10 B) 6 C) 9
D) 8 E) 7

8. ¿Qué letra continúa en la sucesión?

B; D; H; N, U; ...

A) T B) S C) R
D) E E) Q

9. Determina la letra que continúa en la sucesión:

O; M; K; H; F; ...

A) C B) B C) D
D) G E) A

10. Halla x, en:

4; 6; 10; 18; 32; x

A) 48 B) 50 C) 54
D) 42 E) 52

11. Calcula el número que continúa en la siguiente sucesión:

$\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}$; 2; 8; ...

A) 64 B) 32 C) 24
D) 12 E) 16

12. Calcula el número que continúa en la siguiente sucesión:

131; 121; 109; 95; 79; ...

A) 69 B) 71 C) 65
D) 61 E) 68

13. Determina el número que continúa en la sucesión:

4; 28; 34; 36; 37; ...

A) 29 B) 25 C) 32
D) 36 E) 38

14. Determina el número que continúa en la siguiente sucesión:

−3; 0; 0; 0; 5; 22; ...

A) 60 B) 56 C) 48
D) 58 E) 42

Claves

1. D	5. E	9. A	13. E
2. B	6. D	10. C	14. A
3. A	7. E	11. B	
4. C	8. D	12. D	

Reto



La suma de los términos de una PG decreciente de infinitos términos es "m" veces la suma de sus "n" primeros términos. Halla la razón de la PG.

Rpta.: $\left(\frac{m-1}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Halla x, en:
5; 15; 45; 135; x
A) 425 B) 375 C) 395 D) 415 E) 405

2. Halla x, en :
7; 7; 14; 42; x
A) 128 B) 158 C) 168 D) 148 E) 138

3. Halla x, en:
10; 11; 13; 16; 20; x
A) 30 B) 25 C) 27 D) 29 E) 26

4. Halla x, en:
21; 28; 37; 48; 61; x
A) 66 B) 72 C) 68 D) 76 E) 74

5. ¿Qué letra continúa en la siguiente sucesión?
K; N; P; S; V; ...
A) Z B) Y C) W D) A E) X

6. ¿Qué letra continúa en la sucesión?
E; I; M; P; T; ...
A) Z B) S C) V D) X E) W

7. ¿Qué letra continúa en la sucesión?
F; K; N; R; U; ...
A) W B) T C) Z D) X E) Y

8. Halla x, en:
14; 17; 16; 19; 18; 21; x
A) 24 B) 22 C) 20 D) 23 E) 17

9. Halla x; en:
15; 13; 18; 16; 21; 19; x
A) 25 B) 23 C) 22 D) 18 E) 24

10. Halla x, en:
1; 1; 3; 15; x
A) 100 B) 105 C) 60 D) 95 E) 80

NIVEL 2

11. Halla x, en :
20; 24; 25; 28; 30; 32; 35; 36; x
A) 35 B) 40 C) 41 D) 34 E) 39

12. Halla x, en:
8; 27; 64; 125; x
A) 250 B) 312 C) 625 D) 216 E) 256

13. Halla x, en:
40; 43; 49; 58; x
A) 65 B) 68 C) 66 D) 70 E) 75

14. Halla x, en:
4; 4; 6; 18; 22; 110; 116
A) 812 B) 820 C) 905 D) 870 E) 825

15. Halla x, en:
28; 21; 63; 56; 168; x
A) 158 B) 161 C) 182 D) 147 E) 175

16. ¿Qué letra continúa en la sucesión?
A; D; G; J; ...
A) P B) N C) M D) S E) W

17. Halla x, en:
2; 16; 128; x
A) 1024 B) 128 C) 512 D) 168 E) 256

18. Halla x, en:
16; 20; 24; 36; 96; x
A) 382 B) 516 C) 125 D) 253 E) 195

19. Halla x, en:
2; 10; 30; 74; 166; x
A) 155 B) 184 C) 210 D) 354 E) 192

20. Halla x, en:
3; 5; 8; 13; 21; x
A) 30 B) 32 C) 36 D) 33 E) 28

NIVEL 3

21. Halla x, en:
13; 16; 21; 29; 41; x
A) 58 B) 46 C) 53 D) 45 E) 49

22. Halla a + b, en:
0; 2; 3; 4; 6; 6; a; b
A) 12 B) 14 C) 17 D) 13 E) 16

23. ¿Qué número sigue?
1; 2; 5; 26; ...
A) 132 B) 677 C) 358
D) 52 E) 260

24. ¿Qué número sigue en la siguiente sucesión?
2; 10; 13; 12; 8; ...

A) 6 B) 14 C) 4 D) 2 E) 10

25. ¿Qué número sigue en la siguiente sucesión?
7; 13; 37; 145; ... **UNI 2003-II**

A) 613 B) 752 C) 721
D) 527 E) 682

26. ¿Qué número sigue en la sucesión?
5; 6; 7; 9; 15; ...

A) 22 B) 36 C) 39 D) 25 E) 28

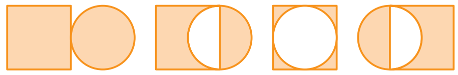
27. ¿Qué número sigue en la sucesión?
4; 8; 11; 44; 49; ...

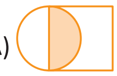
A) 76 B) 68 C) 55 D) 100 E) 294

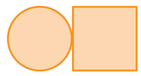
28. Determina el número que completa la serie:
4; 9; 26; 106; 528; 3171; ... **UNI 2004-I**

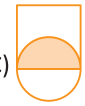
A) 22 194 B) 23 200 C) 21 330
D) 18 640 E) 20 420

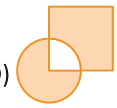
29. Indica la figura que sigue:

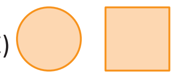


A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

30. Halla x, en:
–4; 0; 0; 0; 6; 26; x

A) 35 B) 30 C) 65 D) 60 E) 70

Claves

NIVEL 1
1. E
2. C
3. B
4. D
5. B
6. D
7. C
8. C
9. E
10. B

NIVEL 2
11. B
12. D
13. D
14. A
15. B
16. C
17. A
18. B
19. D
20. D

NIVEL 3
21. A
22. C
23. B
24. D
25. C
26. C
27. E
28. A
29. B
30. E

Numeración

DEFINICIÓN

Es la parte de la aritmética que se encarga del estudio de la correcta formación, lectura y escritura de los números.

NÚMERO

Es un ente matemático que nos permite cuantificar los elementos de la naturaleza, dicho ente nos da la idea de cantidad.

NUMERAL

Es la representación simbólica o figurativa de un número.
Ejemplo: III; ≡; tres; 3; kimsa.

CIFRA

Son los símbolos que convencionalmente se utilizan en la formación de los numerales y estos son: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Del orden

Toda cifra que forma parte de un numeral ocupa un orden; el cual se indica de derecha a izquierda, y un lugar el cual se cuenta de izquierda a derecha.
Ejemplo:

Orden →	5	4	3	(2)	1	0
	9	7	0	4	3	8
Lugar →	1	2	3	(4)	5	6

De la base

La base es un número entero mayor que la unidad, el cual nos indica la cantidad de unidades necesarias y suficientes para formar una unidad de orden inmediato superior.
Ejemplo:
Corrige los siguientes numerales:

a) 558_3
Debemos agrupar las cifras de 3 en 3 de acuerdo a la base.

$$558_3 = 5\overset{2}{5}2_3$$
$$= 572_3$$
$$= \overset{2}{5}12_3$$
$$= 712_3$$
$$\therefore\ 558_3 = 2112_3$$

b) 6279_5
Debemos agrupar las cifras de 5 en 5 de acuerdo a la base.

$$6279_5 = 62\overset{1}{7}4_5$$
$$= 6284_5$$
$$= 6\overset{1}{2}34_5$$
$$= 6334_5$$
$$\therefore\ 6279_5 = 11334_5$$

NUMERAL CAPICÚA

Son aquellos numerales cuyas cifras equidistantes son iguales.
Ejemplos:

$$3223;\ 454_8;\ 66_7;\ \overline{aba}_k$$



Atención

Para hallar el número de cifras de un numeral se debe sumar el orden y lugar de una cifra cualquiera de dicho numeral. En el ejemplo adjunto:

2 + 4 = 6
(Orden) (Lugar) (n.° de cifras)

Nota

Toda cifra que forma parte de un numeral es un número entero menor que la base. Así en el sistema de base "n" se pueden utilizar "n" cifras diferentes, las cuales son:

0; 1; 2; 3; ... ; (n – 1) — Máxima
Cifras significativas

Nota

A mayor numeral aparente le corresponde menor base y viceversa.
Si: $143_n = 53_k$
Como: 143 > 53
⇒ n < k

Recuerda

De manera práctica, se multiplica la cifra por la base elevada al orden de dicha cifra.



DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA

Es la suma de los valores relativos de las cifras que conforman dicho numeral.

Ejemplos:

- $723_8 = 7 \times 8^2 + 2 \times 8 + 5$
- $5142_7 = 5 \times 7^3 + 1 \times 7^2 + 4 \times 7 + 2$

En general: $\overline{abcde}_n = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$

También se puede descomponer por bloques:

- $454545_6 = 45_6 \times 6^4 + 45_6 \times 6^2 + 45_6$
- $\overline{abab}_n = \overline{ab}_n \times n^2 + \overline{ab}_n$

Ejemplo:

Calcula a + b + n si: $\overline{abab}_n = 407$

Resolución:

$\overline{ab}_n \times n^2 + \overline{ab}_n = 407$

$\overline{ab}_n(n^2 + 1) = 11 \times 37$

$n^2 + 1 = 37 \Rightarrow n = 6$

$\overline{ab}_6 = 11$

$\overline{ab}_6 = 15_6 \Rightarrow a = 1;\ b = 5$

$\therefore\ a + b + n = 12$

Atención

En el 1.er caso también se puede utilizar el método de Ruffini.

	3	1	4	2
5	↓	15	80	420
	3	16	84	422

$\therefore\ 3142_5 = 422$



CAMBIOS DE BASE

Primer caso: de base “m” a base 10

Procedimiento: descomposición polinómica.

Ejemplo:

Representa 3142_5 en base 10.

$3142_5 = 3 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 4 \times 5 + 2 = 422$

Segundo caso: de base 10 a base “n”

Procedimiento: divisiones sucesivas.

Ejemplo:

Representa 741 en el sistema heptanario.

```
741 | 7
735   105 | 7
 (6)  105    15 | 7
       (0)   14   (2)
             (1)
```

$\Rightarrow 741 = 2106_7$

Del valor de las cifras

Toda cifra que forma parte de un numeral posee dos valores.

Valor absoluto (VA): por la cantidad de unidades simples que representa.

Valor relativo (VR): por el orden que ocupa en el numeral.

Ejemplo:

87534_9

VA(8) = 8
VA(7) = 7
VA(5) = 5
VA(3) = 3
VA(4) = 4

$VR(4) = 4 \times 9^0$
$VR(3) = 3 \times 9^1$
$VR(5) = 5 \times 9^2$
$VR(7) = 7 \times 9^3$
$VR(8) = 8 \times 9^4$

Nota

- Solo para la última cifra coincide su valor relativo con su valor absoluto.
- Se puede observar que: $87534_9 = 8 \times 9^4 + 7 \times 9^3 + 5 \times 9^2 + 3 \times 9 + 4$

  Es decir: $87534_9 = VR(8) + VR(7) + VR(5) + VR(3) + VR(4)$

REPRESENTACIÓN LITERAL DE LOS NÚMEROS

Cuando no se conocen las cifras de un numeral, estas se representan mediante letras minúsculas, teniendo en cuenta que:

a) Toda expresión entre paréntesis representa una cifra.

Ejemplos:

$\overline{(a-3)(a+2)(2a-1)}_9$ — Numeral de 3 cifras en base 9

$\overline{(n-1)(n-1)(n-1)(n-1)}_n$ — Numeral de 4 cifras máximas en base n

b) La cifra de mayor orden debe ser diferente de cero.

Ejemplo:
Numeral de dos cifras en base 3.

$\overline{ab}_3 \in \{10_3; 11_3; 12_3; 20_3; 21_3; 22_3\} \Rightarrow$ **a** solo puede tomar 1 ó 2.

c) Letras diferentes no necesariamente indican cifras diferentes, salvo que lo indiquen.

Ejemplo:
Numeral de dos cifras en base 10: $\overline{ab} \in \{10; 11; 12; ...; 99\}$

Ejemplo:
Si los siguientes numerales están bien escritos.

110_a; $\overline{aa1}_b$; $\overline{c2}_5$; $\overline{21b}_c$

Calcula: $a \times b \times c$

Resolución:
Toda cifra que forma parte de un numeral es menor que la base.

$1 < a$; $a < b$; $c < 5$; $b < c$

Ordenando: $1 < a < b < c < 5$

$a = 2$, $b = 3$, $c = 4$

$\therefore\ a \times b \times c = 24$

NUMERAL DE CIFRAS MÁXIMAS

- $9 = 10 - 1$
  $99 = 10^2 - 1$
  $999 = 10^3 - 1$
  $\vdots$
  $\underbrace{99\ ...\ 9}_{k\ cifras} = 10^k - 1$

- $7_8 = 8 - 1$
  $77_8 = 8^2 - 1$
  $777_8 = 8^3 - 1$
  $\vdots$
  $\underbrace{77\ ...\ 7_8}_{k\ cifras} = 8^k - 1$

En general: $\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)...(n-1)}_n}_{k\ cifras} = n^k - 1$

BASES SUCESIVAS

- $13_n = n + 3$
- $15_{13_n} = n + 3 + 5$
- $12_{15_{13_n}} = n + 3 + 5 + 2$

En general:

$$\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_{\ddots_{\overline{1x}_n}}}} = n + a + b + c + ... + x$$

Atención

¿Cuántos numerales de 3 cifras todas impares existen en base 5?

Veamos

111_5; 113_5; 131_5
133_5; 311_5; 313_5
331_5; 333_5

$\therefore$ Existen 8 numerales.



Importante

Expresa el numeral:

$N = \underbrace{222\ ...\ 22_3}_{50\ cifras}$

en base 9.

Veamos:

$N = 3^{50} - 1$
$= (3^2)^{25} - 1$
$= 9^{25} - 1$
$= \underbrace{888\ ...\ 88_9}_{25\ cifras}$



Nota

También:

$$\left.\overline{a1}_{\overline{a1}_{\overline{a1}_{\ddots_{\overline{a1}_{\overline{a1}_n}}}}}\right\} k\ veces = a^k . n + a^{k-1} + ... + a^2 + a + 1$$

CANTIDAD DE NUMERALES CON CIERTO NÚMERO DE CIFRAS

¿Cuántos números de tres cifras existen en el sistema de base 10 y base 7?

- Base 10: sea el numeral $\overline{abc}$

  $\overline{abc} \in \{100; 101; 102; ...; 999\}$

  Cantidad de numerales: $999 - 99 = 900$

  Luego: $10^2 \leq \overline{abc} < 10^3$

- Base 7: sea el numeral $\overline{xyz}$

  $\overline{xyz} \in \{100_7; 101_7; 102_7; ...; 666_7\}$

  Cantidad de numerales: $666_7 - (100_7 - 1) = 295$

  Luego: $7^2 \leq \overline{xyz} < 7^3$

  En general: si N_b tiene k cifras, se limita del siguiente modo:

$$b^{k-1} \leq N_b < b^k$$

Observación

Si se tiene:

$N = \overline{abc}_8 = \overline{mnpq}_5$

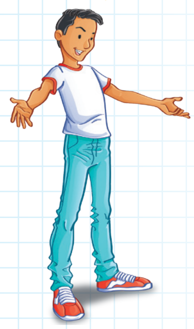
Entonces:

$8^2 \leq N < 8^3 \wedge 5^3 \leq N < 5^4$

Luego:

$5^3 \leq N < 8^3$

$\therefore 125 \leq N < 512$



CASOS ESPECIALES DE CAMBIOS DE BASE

1.er caso: de base "n" a base "n^k"

Procedimiento:

- El numeral se descompone en bloques de k cifras a partir del orden cero.
- Cada bloque se descompone polinómicamente y el resultado es la cifra en la nueva base.

Ejemplo:

Expresa 11101110111_2 en el sistema octanario.

Resolución

Como $8 = 2^3$ cada bloque debe tener tres cifras.

11	101	110	111	(base 2)
$1 \times 2 + 1$	$1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$	$1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 0$	$1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$	
3	5	6	7	(base 8)

$\therefore 11101110111_2 = 3567_8$

Atención

Si todos los bloques no tienen k cifras; se les completa con ceros a la izquierda, hasta tener k cifras, esto en el caso del primer grupo de la izquierda.



2.° caso: de base "n^k" a base "n"

Procedimiento:

- Cada cifra del numeral genera un bloque de k cifras.
- Las cifras de cada bloque se obtienen mediante las divisiones sucesivas.

Ejemplo:

Expresa 6357_8 en el sistema binario.

Resolución:

Como $8 = 2^3$ el bloque debe tener tres cifras.

6	3	5	7	(base 8)
6 ÷ 2 = 3, resto 0; 3 ÷ 2 = 1, resto 1	3 ÷ 2 = 1, resto 1; 1 ÷ 2 = 0, resto 1	5 ÷ 2 = 2, resto 1; 2 ÷ 2 = 1, resto 0	7 ÷ 2 = 3, resto 1; 3 ÷ 2 = 1, resto 1	
110	011	101	111	(base 2)

$\therefore 6357_8 = 110011101111_2$

Problemas resueltos

1 Si: $\overline{a89}_m = \overline{81m}_n = \overline{6mp}_{12}$; calcula; $a + m + n + p$

Resolución:

Sabemos que toda cifra de un numeral es menor que su base.

$$9 < m; \ m < n$$

También a mayor numeral aparente le corresponde menor base y viceversa.

$$\overset{+}{\overline{81m}}_{\underset{-}{n}} = \overset{-}{\overline{6mp}}_{\underset{+}{12}}$$

$$n < 12$$

Ordenamos: $9 < m < n < 12$
$\qquad\qquad\qquad\ \ \downarrow \quad \downarrow$
$\qquad\qquad\qquad\ 10 \quad 11$

Reemplazamos $\overline{a89}_{10} = \overline{81(10)}_{11}$

$\overline{a89} = 8 \,.\, 11^2 + 1 \,.\, 11 + 10$

$\overline{a89} = 989$

$\Rightarrow a = 9$

También: $989 = \overline{6(10)p}_{12}$

$989 = 6 \times 12^2 + 10 \times 12 + p$

$989 = 984 + p$

$\Rightarrow \ p = 5$

$\therefore \ a + m + n + p = 35$

2 Se tiene: $\overline{\left(\frac{15}{a}\right)\left(\frac{16}{a-1}\right)\left(\frac{15}{a-2}\right)}_8 = \overline{mnpq}_a$

Halla: $m \times n \times q - a + p$

Resolución:

a y $(a - 2)$ deben ser divisores de 15, y el único valor que cumple es: $a = 5$

Luego: $345_8 = \overline{mnpq}_5$

Convirtiendo 345_8 a base 5:

- Primero 345_8 a base 10:

  $345_8 = 3 \times 8^2 + 4 \times 8 + 5$
  $= 192 + 32 + 5$
  $= 229$

- Ahora 229 a base 5:

```
229 |_5
225   45 |_5
 (4)  45    9 |_5
     (0)    5  (1)
           (4)
```

$\Rightarrow 229 = 1404_5$

Entonces: $1404_5 = \overline{mnpq}_5$

$m = 1; n = 4; p = 0; q = 4$

Finalmente: $m \times n \times q - a + p$
$\qquad\qquad\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
$\qquad\qquad\quad 1 \times 4 \times 4 - 5 + 0$

$\therefore \ m \times n \times q - a + p = 11$

3 Si: $\overline{(n-1)(n^3)(n+3)} = \overline{aba}_7 = \overline{mppq}_5$

Calcula: $n + a + b + m + p + q$

Resolución:

Sabemos que toda cifra de un numeral es menor que su base.

$$1 < n^3 < 10 \ \Rightarrow \ n = 2$$

Reemplazamos:

$185 = \overline{aba}_7$

```
185 |_7
182   26 |_7
 (3)  21   (3)
      (5)
```

$\Rightarrow 353_7 = \overline{aba}_7$

$a = 3; b = 5$

También: $185 = \overline{mppq}_5$

```
185 |_5
185   37 |_5
 (0)  35    7 |_5
     (2)    5  (1)
           (2)
```

$1220_5 = \overline{mppq}_5$

$m = 1; p = 2; q = 0$

$\therefore \ n + a + b + m + p + q = 13$

4 Si: $\underbrace{\overline{aaa \ldots a}_2}_{k \text{ cifras}} = \overline{1xyz}$

Calcula: $a + x + y + z + k$

Resolución:

Es claro que $a = 1$.

Reemplazamos: $\underbrace{111 \ldots 1_2}_{k \text{ cifras}} = \overline{1xyz}$

$2^k - 1 = \overline{1xyz}$

Si $k = 9$: $\quad 2^9 - 1 = \overline{1xyz}$

$511 = \overline{1xyz}$ (No cumple)

Si $k = 10$: $2^{10} - 1 = \overline{1xyz}$

$1023 = \overline{1xyz}$ (Sí cumple)

Si $k = 11$: $2^{11} - 1 = \overline{1xyz}$

$2047 = \overline{1xyz}$ (No cumple)

Luego: $k = 10; x = 0 ; y = 2; z = 3$

$\therefore \ a + x + y + z + k = 16$

5 Si: $\overline{a2a}_n = \overline{a00}_4$

Halla:

$$E = \underbrace{\overline{an}_{\overline{an}_{\overline{an}_{\overline{an}_{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\overline{an}}}}}}_{30 \text{ veces}} + \underbrace{\overline{an}_{\overline{an}_{\overline{an}_{\overline{an}_{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\overline{an}}}}}}_{20 \text{ veces}}$$

Resolución:

A mayor numeral aparente le corresponde menor base y viceversa.

$$\overline{a2a}_n = \overline{a00}_4$$

$$2 < n < 4 \Rightarrow n = 3$$

Reemplazando: $\overline{a2a}_3 = \overline{a00}_4$

$$a \times 3^2 + 2 \times 3 + a = a \times 4^2$$

$$9a + 6 + a = 16a \Rightarrow a = 1$$

Luego:

$$E = \underbrace{13_{13_{13_{13_{\cdot^{\cdot^{\cdot}}13}}}}}_{30 \text{ veces}} + \underbrace{13_{13_{13_{13_{\cdot^{\cdot^{\cdot}}13}}}}}_{20 \text{ veces}}$$

$E = 10 + 30(3) + 10 + 20(3)$

$\therefore$ $E = 170$

6 Si: $\overline{a0(a-1)}_4 = \overline{bc0}_{a+b}$ y $\overline{eee}_d = \overline{de}_a$

Halla: $E = a + b + c + d + e$

Resolución:

Toda cifra de un numeral es menor que su respectiva base.

$a < 4$; $e < d$; $d < a$

Ordenamos: $0 < e < d < a < 4$

$$\begin{matrix} & & e & & d & & a \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 1 & & 2 & & 3 \end{matrix}$$

Reemplazamos: $111_2 = \overline{2c}_3$

$$1 \,.\, 2^2 + 1 \,.\, 2 + 1 = 2 \times 3 + c$$

$$7 = 6 + c \Rightarrow c = 1$$

También: $3023_4 = \overline{b10}_{3+b}$

$$3 \,.\, 4^3 + 2 \,.\, 4 + 3 = b(3 + b)^2 + 1(3 + b)$$

$$203 = b(b^2 + 6b + 9) + b + 3$$

$$203 = b^3 + 6b^2 + 9b + b + 3$$

$$200 = b^3 + 6b^2 + 10b \Rightarrow b = 4$$

$\therefore$ $E = a + b + c + d + e = 11$

7 ¿En cuántos sistemas de numeración el número 1312 se escribe con 4 cifras?

Resolución:

Según enunciado:

$1312 = \overline{abcd}_n$

Como:

$$1000_n \le \overline{abcd}_n < 10000_n$$

$$n^3 \le 1312 < n^4$$

$$n \in \underbrace{\{7; 8; 9; 10\}}_{4 \text{ valores}}$$

$\therefore$ Se escribe con 4 cifras en 4 sistemas.

8 Si se cumple $\overline{9ab}_k = 213312_n$, además $n = \sqrt{k}$; calcula: $a + b + n + k$

Resolución:

Por dato: $n = \sqrt{k} \Rightarrow n^2 = k$

Reemplazando: $\overline{9ab}_{n^2} = 213312_n$

Utilizando el caso especial de cambio de base (De base "n" a base "n^k") $k = 2$

- $21_n = 9$; $2n + 1 = 9$; $n = 4$; $\Rightarrow k = 16$
- $33_n = a$; $33_4 = a$; $a = 15$
- $12_n = b$; $12_4 = b$; $b = 6$

$\therefore$ $a + b + n + k = 41$

9 Se expresa el menor numeral del sistema octonario cuya suma de cifras es 420 en el sistema cuaternario. Da como respuesta la suma de cifras en este último sistema.

Resolución:

Para expresar el menor numeral del sistema octonario estas cifras deben ser máximas.

$$\underbrace{777 \ldots 77}_{60 \text{ cifras}}{}_8$$

Suma de cifras = 7(60) = 420

Luego: $\underbrace{777 \ldots 77}_{60 \text{ cifras}}{}_8 = 8^{60} - 1 = (2^3)^{60} - 1$

$$= (2^2)^{90} - 1$$

$$= 4^{90} - 1$$

$$777 \ldots 77_8 = \underbrace{333 \ldots 33}_{90 \text{ cifras}}{}_4$$

$\therefore$ Suma de cifras = 3(90) = 270

Actividades de razonamiento

1. Halla el máximo valor de a + n, si:

$$\overline{a0a}_n = \overline{(2a)(a)}_{2n}$$

A) 11 B) 9 C) 7 D) 10 E) 8

2. En qué sistema se realizó la operación:
42 . 32 = 2004

A) 9 B) 7 C) 5 D) 8 E) 6

3. Si: $\dfrac{\overline{abab}}{3} = \overline{\left(\dfrac{b}{2}\right)a\left(\dfrac{b}{2}\right)a}$

Halla el máximo valor de "a".

A) 6 B) 4 C) 7 D) 8 E) 2

4. Si: $\overline{abcabc}_n = 420$, halla a + b + c + n.

A) 6 B) 5 C) 4 D) 7 E) 8

5. Si un número de cierta base se convierte a las 2 bases siguientes, se escriben como 1134 y 541 respectivamente. ¿Cómo se escribe en la base anterior?

A) 20104_5 B) 10102_4 C) 10201_3
D) 30501_6 E) 10304_5

6. El mayor número de 3 cifras en base "n" es llevado a la base "n − 1", ¿halla la suma de cifras en esta nueva base?

A) 2n + 3 B)7 C) 6
D) 3n − 1 E) 5

7. Si un número se escribe en base 10 como $\overline{xxx}$ y en base 6 como $\overline{aba}$, entonces, a + b + x es igual a:

A) 4 B) 6 C) 7 D) 3 E) 5

8. Se convierte 100111_n a la base n^2 y se obtiene un numeral cuya suma de sus cifras más su base da 26. Halla "n".

A) 7 B) 3 C) 4 D) 6 E) 2

9. ¿Cómo se escribe en la base n^k, $(k \in \mathbb{Z}^+)$ el cuadrado del mayor número de k cifras de la base n?

A) $\overline{(n^k-1)2}_{n^k}$ B) $\overline{(n^k-2)2}_{n^k}$

C) $\overline{(n^k-2)0}_{n^k}$ D) $\overline{(n^k-1)1}_{n^k}$

E) $\overline{(n^k-2)1}_{n^k}$

10. Calcula el número de términos de la siguiente progresión aritmética:

$23_n; 30_n; 34_n; ...; 445_n$

A) 52   B) 54   C) 56   D) 57   E) 51

11. ¿En cuántos sistemas de numeración 3344 se denota con tres cifras?

A) 47   B) 40   C) 43   D) 39   E) 42

12. Sabiendo que:

$$\overline{abm}_{\overline{ab}_{\overline{ab}_{\ddots_{\overline{ab}_3}}}} = \overline{14(m+3)}$$

"m" veces

Halla: a + b + m

A) 6   B) 5   C) 9   D) 7   E) 8

13. Si:

$N = 14 \times 13^5 + 21 \times 13^4 + 27 \times 13^2 + 5 \times 13 + 17$;

¿cuál será la suma de cifras del numeral N al expresarlo en base 13?

A) 25   B) 22   C) 20   D) 21   E) 24

14. ¿En qué sistema de numeración existen 1482 números de la forma: $\overline{a(a+2)(b-2)b}$?

A) 40   B) 38   C) 43   D) 41   E) 42

Claves

1. C	5. B	9. E	13. E
2. B	6. B	10. B	14. D
3. D	7. A	11. C	
4. A	8. C	12. D	

Reto



¿En cuántos sistemas de numeración, el número $2^{18} - 1$ se puede representar como el máximo numeral posible?

Rpta.: 6

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. ¿En qué sistema de numeración el número 141 se escribe 261?

A) 11 B) 9 C) 7 D) 12 E) 8

2. ¿En qué sistema se realizó la operación:
$50 - 22 = 27$?

A) 11 B) 10 C)7 D) 8 E) 9

3. ¿En qué sistema se realizó la operación:
$8 . 8 = 71$?

A) 12 B) 9 C) 8 D) 6 E) 11

4. Si: $1010_{101_x} = 1010$; halla: x

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 3

5. ¿Cuántos valores de "a" satisfacen:
$\overline{a(2a)a} = 11 . \overline{aa}$?

A) 5 B) 8 C) 4 D) 2 E) 3

6. Halla a + b + n, si:

$$\overline{10n3}_6 = \overline{abb4}_n$$

A) 8 B) 10 C) 6 D) 12 E) 12

7. Halla: a + b + n, si se cumple la siguiente igualdad:

$$\overline{n25}_9 = \overline{1ab7}_n$$

A) 9 B) 10 C) 14 D) 13 E) 12

8. Si: $\overline{aaa}_9 = \overline{1a0a}_6$
Halla el valor de a^2.

A) 16 B) 25 C) 1 D) 9 E) 4

9. Indica la base del sistema de numeración en el cual la suma del mayor número de 3 cifras y el menor número de 3 cifras es igual a 1451.

A) 8 B) 11 C) 12 D) 13 E) 9

10. Si: $\overline{xxy} = 1183_n$
Halla: x + y

A) 11 B)8 C) 13 D) 9 E) 10

NIVEL 2

11. Si: $\overline{aab}_5 = \overline{bbb}_4$
Halla: a + b

A) 9 B) 5 C) 7 D) 4 E) 6

12. Se cumple que: $\overline{16n}_9 = \overline{ab7}_n$
Halla: a + b + n

A) 10 B) 13 C) 9 D) 11 E) 14

13. Halla "b" si se cumple la siguiente igualdad:

$12_{13_{14_{15_b}}} = 22_9$

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 7

14. Si se cumple la siguiente igualdad:

$$\overline{10a3}_7 = \overline{abb}_9$$

Halla: b – a

A) 2 B) 4 C) 5 D) 3 E) 1

15. ¿Cuántos números existen en el sistema decimal que tienen la siguiente forma: $\overline{(a-2)b(8-a)}$?

A) 70 B) 99 C) 90 D) 50 E) 180

16. Calcula el valor de "a" si se cumple que:

$$\overline{aaa}_5 = \overline{(a-1)aa}_6$$

A) 2 B) 5 C) 3 D) 4 E) 6

17. Halla "b – a", si: $\overline{aa0} + \overline{bb0} = \overline{aa00}$

A) 5 B) 8 C) 7 D) 4 E) 6

18. Si: $\overline{abc}_9 = \overline{cba}_7 = \overline{xyz}_{10}$

Halla: x + y + z

A) 14 B) 16 C) 18 D) 15 E) 12

19. ¿En cuántas bases se puede representar al número 2856 con 3 cifras?

A) 40 B) 38 C) 37 D) 41 E) 39

20. Si: $121_n = \overline{6ab}$ y $a < 5$;

halla: a + b + n

A) 31 B) 29 C) 27 D) 32 E) 28

NIVEL 3

21. Calcula: x . y

Si: $16_{16_{16_{\cdot_{\cdot_{\cdot_{16_{\overline{xy}}}}}}}} = 105$ ($\overline{xy}$ veces)

A) 8 B) 12 C) 3 D) 6 E) 15

22. ¿En qué sistema de numeración los números 123; 140 y 156 forman ellos una progresión aritmética?

A) 6 B) 8 C) 7 D) 5 E) 9

23. Calcula n:

$18_{18_{18_{\cdot_{\cdot_{\cdot_{18_n}}}}}} = 559$ (24_n veces)

A) 23 B) 39 C) 31 D) 27 E) 28

(24) ¿Cómo se representa 234_x en base (x – 1)?

A) $269_{(x-1)}$
B) $369_{(x-1)}$
C) $299_{(x-1)}$
D) $279_{(x-1)}$
E) $379_{(x-1)}$

(25) Si: $N = 16 \times 13^5 + 20 \times 13^4 + 31 \times 13^2 + 6 \times 13 + 39$ ¿cuál será la suma de las cifras del numeral N al expresarlo en base 13?

A) 30 B) 32 C) 28 D) 34 E) 26

(26) ¿Cuántos "unos" tiene N en el sistema binario?

$$N = \underbrace{676767 \ldots 676_8}_{83 \text{ cifras}}$$

A) 206 B) 209 C) 207 D) 210 E) 208

(27) Si el numeral $9^{10} - 1$ se escribe como: $\underbrace{\overline{aa \ldots aa}_9}_{\text{"n" cifras}}$,

halla la suma de cifras de: a + n

A) 9 B) 18 C) 11 D) 10 E) 12

(28) Halla: a + b + n, si:

$$\overline{21ab}_n = \overline{117}_{n^2}$$

A) 8 B)7 C) 6 D) 9 E) 10

(29) ¿Cuántas cifras tiene 128^{200} al ser expresado en base 8?

A) 400 B) 467 C) 320 D) 600 E) 120

(30) ¿Cuántos números de 5 cifras en el sistema heptal, tienen como producto de sus cifras, el valor de 30?

A) 60 B) 40 C) 50 D) 80 E) 70

Claves

NIVEL 1			
1. C	9. B	17. B	25. C
2. E	10. C	18. A	26. C
3. B	NIVEL 2	19. E	27. B
4. E	11. B	20. A	28. A
5. C	12. D	NIVEL 3	29. B
6. B	13. A	21. E	30. D
7. D	14. E	22. E	
8. A	15. D	23. C	
	16. C	24. D	

Analogías y distribuciones numéricas

ANALOGÍA NUMÉRICA

Es un conjunto de 3 filas de 3 números cada una, donde el número central está entre paréntesis y resulta de operar los números de los extremos.

Ejemplo: halla el número que falta en la siguiente analogía numérica.

5	(19)	6
7	(36)	13
9	( )	37

Resolución:

Se tantea con los valores extremos hasta encontrar el número central.

1.ª fila: $5^2 - 6 = 19$

2.ª fila: $7^2 - 13 = 36$

3.ª fila: $9^2 - 37 = \boxed{44}$

$\therefore$ El número que falta es 44.

DISTRIBUCIÓN NUMÉRICA

Es un arreglo de números que están dispuestos en filas y columnas. Para determinar el número que falta se debe establecer una relación que puede ser horizontal o vertical.

Ejemplo: encuentra el número que falta en la siguiente distribución numérica.

7	2	5	19
8	3	6	30
9	5	4	...

Resolución:

Buscamos una relación en las filas.

1.ª fila: $7 \times 2 + 5 = 19$

2.ª fila: $8 \times 3 + 6 = 30$

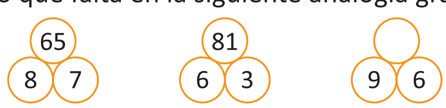
3.ª fila: $9 \times 5 + 4 = \boxed{49}$

$\therefore$ El número que falta es 49.

ANALOGÍA GRÁFICA

Es un conjunto de 3 figuras iguales, que tienen dispuestos números de la misma manera en cada figura.

Ejemplo: halla el número que falta en la siguiente analogía gráfica.



Resolución:

El número que se ubica en la parte superior resulta de multiplicar los números de la base e invertir las cifras.

1.ª figura: $8 \times 7 = 56 \Rightarrow 65$

2.ª figura: $6 \times 3 = 18 \Rightarrow 81$

3.ª figura: $9 \times 6 = 54 \Rightarrow \boxed{45}$

$\therefore$ El número que falta es 45.

Importante

Para resolver los problemas de analogías numéricas hay que tantear con los números de los extremos, efectuando las diferentes operaciones hasta encontrar el número del centro.



Nota

Existen casos donde al resolver una analogía numérica se encuentran 2 respuestas..

Halla "x" en:

2	(16)	4
3	(27)	3
2	(x)	5

A) 15 B) 18 C) 25
D) 20 E) 27

Veamos:

En la 1.ª fila: $2^4 = 16$
En la 2.ª fila: $3^3 = 27$
En la 3.ª fila: $2^5 = 32$
$x = 32$
En la 1.ª fila: $4^2 = 16$
En la 2.ª fila: $3^3 = 27$
En la 3.ª fila: $5^2 = 25$
$x = 25$

En estos casos se toma como correcto aquel resultado que se encuentra en las alternativas.

$\Rightarrow x = 25$

Clave C

Recuerda

En una analogía gráfica, la figura es algo accesorio que por lo general no interviene en la solución.



Problemas resueltos

1 ¿Qué número falta?

4	(80)	5
6	(108)	3
7	( )	4

Resolución:

1.ª fila: $4^2 \times 5 = 80$

2.ª fila: $6^2 \times 3 = 108$

3.ª fila: $7^2 \times 4 = \boxed{196}$

$\therefore$ El número que falta es 196.

2 ¿Qué número falta?

13	(5)	4
15	(6)	7
22	( )	9

Resolución:

1.ª fila: $\sqrt{13 + 3(4)} = 5$

2.ª fila: $\sqrt{15 + 3(7)} = 6$

3.ª fila: $\sqrt{22 + 3(9)} = \boxed{7}$

$\therefore$ El número que falta es 7.

3 Halla el número que falta.

17	(12)	5
25	(18)	8
34	( )	12

Resolución:

1.ª fila: $1 \times 7 + 5 = 12$

2.ª fila: $2 \times 5 + 8 = 18$

3.ª fila: $3 \times 4 + 12 = \boxed{24}$

$\therefore$ El número que falta es 24.

4 Halla el número que falta.

48	(5)	25
59	(7)	34
87	( )	51

Resolución:

1.ª fila: $(4 + 8) - (2 + 5) = 5$

2.ª fila: $(5 + 9) - (3 + 4) = 7$

3.ª fila: $(8 + 7) - (5 + 1) = \boxed{9}$

$\therefore$ El número que falta es 9.

5 ¿Qué número falta?

23	(35)	34
35	(88)	47
58	( )	69

Resolución:

1.ª fila: $(2 + 3) \times (3 + 4) = 35$

2.ª fila: $(3 + 5) \times (4 + 7) = 88$

3.ª fila: $(5 + 8) \times (6 + 9) = \boxed{195}$

$\therefore$ El número que falta es 195.

6 Encuentra el número que falta.

5	(100)	5
4	(48)	4
6	(x)	6

Resolución:

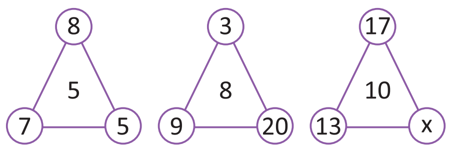
1.ª fila: $5 \times 5(5 - 1) = 100$

2.ª fila: $4 \times 4(4 - 1) = 48$

3.ª fila: $6 \times 6\,(6 - 1) = \boxed{180}$

$\therefore$ El número que falta es 180.

7 ¿Cuánto vale "x"?



Resolución:

1.ª figura: $\dfrac{8+7+5}{4} = 5$

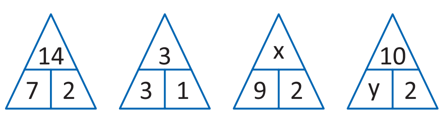
2.ª figura: $\dfrac{3+9+20}{4} = 8$

3.ª figura: $\dfrac{17+13+X}{4} = 10$

$30 + x = 40$

$\therefore\ x = 10$

8 Calcula "x + y" en:



Resolución:

1.ª figura: $7 \,.\, 2 = 14$

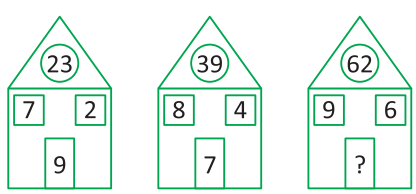
2.ª figura: $3 \,.\, 1 = 3$

3.ª figura: $9 \,.\, 2 = x \Rightarrow x = 18$

4.ª figura: $y \,.\, 2 = 10 \Rightarrow y = 5$

$\therefore\ x + y = 23$

9 Halla el número que falta.



Resolución:

1.ª figura: $7 \times 2 + 9 = 23$

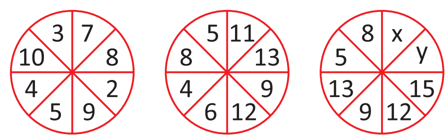
2.ª figura: $8 \times 4 + 7 = 39$

3.ª figura: $9 \times 6 + ? = 62$

$? = 8$

$\therefore$ El número que falta es 8.

10 Halla el valor de "x + y".



Resolución:

Veamos qué relación existe entre los números que se oponen.

1.ª figura:

$10 + 2 = 12$

$3 + 9 = 12$

$7 + 5 = 12$

$8 + 4 = 12$

La suma siempre es 12.

2.ª figura:

$8 + 9 = 17$

$5 + 12 = 17$

$11 + 6 = 17$

$13 + 4 = 17$

La suma siempre es 17.

3.ª figura:

$5 + 15 = 20$

$8 + 12 = 20$

$x + 9 = 20 \Rightarrow x = 11$

$y + 13 = 20 \Rightarrow y = 7$

$\therefore\ x + y = 18$

Actividades de razonamiento

1. Halla el número que falta.

24 (20) 4
33 (15) 18
12 ( ) 4

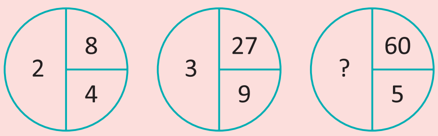
A) 5 B) 8 C) 12 D) 6 E) 3

2. Halla el número que falta.

14 10 4
20 5 15
12 2 x

A) 10 B) 12 C) 8 D) 9 E) 7

3. Halla el número que falta.



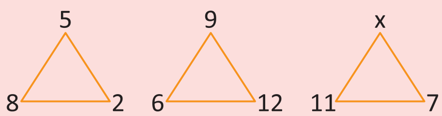
A) 12 B) 10 C) 8 D) 9 E) 15

4. Halla el número que falta en:

16 (18) 20
40 (45) 50
36 ( ) 48

A) 40 B) 41 C) 42 D) 43 E) 44

5. Halla x.



A) 10 B) 12 C) 6 D) 9 E) 8

6. Halla "x".

2 (16) 4
3 (27) 3
6 (x) 2

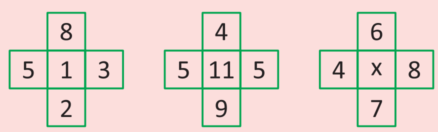
A) 38 B) 40 C) 36 D) 30 E) 32

7. Halla x.

56 (16) 41
92 (24) 67
86 (x) 39

A) 48 B) 52 C) 44 D) 35 E) 37

8. Halla x en la siguiente distribución:



A) 12 B) 18 C) 20 D) 15 E) 10

9. Calcula el valor de x en:

4	(7)	25
64	(14)	36
49	(x)	81

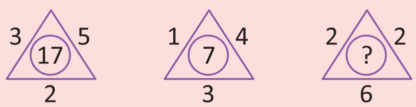
A) 25 B) 21 C) 28 D) 16 E) 17

10. Calcula el valor de x en:

144	(36)	27
25	(5)	1
25	(x)	8

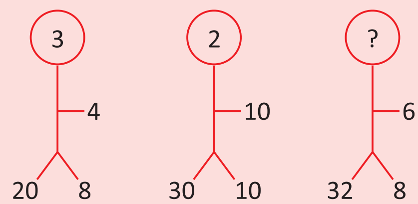
A) 80 B) 6 C) 10 D) 40 E) 7

11. Halla el número que falta.



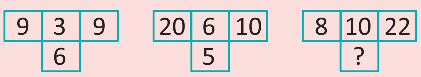
A) 9 B) 11 C) 10 D) 12 E) 13

12. Halla el número que falta.



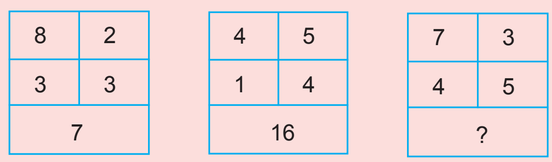
A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 4

13. Halla el número que falta.



A) 1 B) 2 C) 4 D) 3 E) 6

14. Halla el número que falta.



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 1

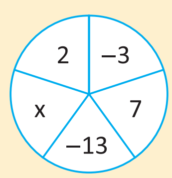
Claves

1. B 2. A 3. A 4. C 5. D 6. C 7. A 8. E 9. D 10. C 11. C 12. E 13. D 14. E

Reto

En el siguiente gráfico, halla el valor de "x".



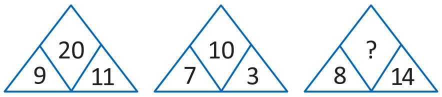


Rpta.: 27

Refuerza practicando

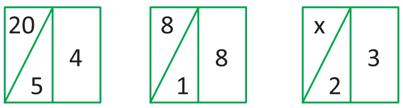
NIVEL 1

1. Halla el valor que falta.



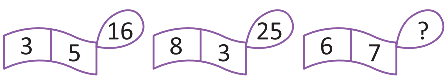
A) 14 B) 15 C) 22 D) 20 E) 23

2. Halla el valor que falta.



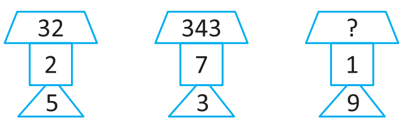
A) 5 B) 9 C) 6 D) 8 E) 10

3. Halla el valor que falta.



A) 40 B) 46 C) 47 D) 43 E) 39

4. Halla el valor que falta.



A) 10 B) 8 C) 9 D) 2 E) 1

5. Halla el valor que falta.

12	10	8

10	9	8

4	x	2

A) 1 B) 2 C) 3 D) 7 E) 8

6. Halla el valor que falta.

14	(5)	2
20	(8)	2
16	( )	4

A) 4 B) 0 C) 3 D) 5 E) 6

7. Halla el valor que falta.

2	(9)	3
4	(17)	2
5	( )	2

A) 25 B) 26 C) 30 D) 37 E) 40

8. Halla el valor que falta.

12	(16)	3
15	(9)	5
28	( )	4

A) 7 B) 36 C) 50 D) 49 E) 23

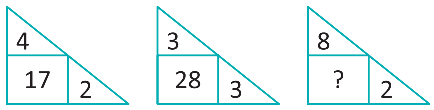
9. Halla el valor que falta.

16	(9)	20
17	(12)	31
23	( )	5

A) 5 B) 7 C) 6 D) 11 E) 10

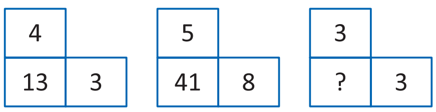
NIVEL 2

10. Halla el valor que falta.



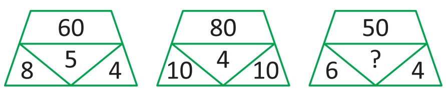
A) 66 B) 67 C) 46 D) 48 E) 65

11. Halla el valor que falta.



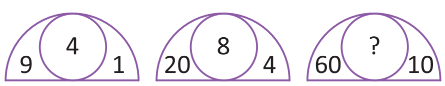
A) 11 B) 12 C) 9 D) 10 E) 8

12. Halla el valor que falta.



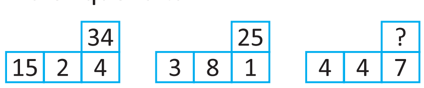
A) 4 B) 3 C) 6 D) 5 E) 8

13. Halla el valor que falta.



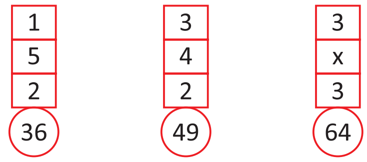
A) 10 B) 15 C) 30 D) 35 E) 25

14. Halla el valor que falta.



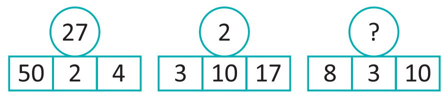
A) 25 B) 20 C) 24 D) 23 E) 27

15. Halla el valor que falta.



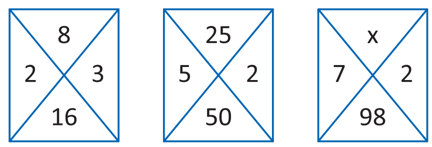
A) 1 B) 2 C) 3 D) 7 E) 8

16. Halla el valor que falta.



A) 7 B) 8 C) 9 D) 6 E) 10

17. Halla el valor que falta:



A) 72 B) 70 C) 36 D) 49 E) 55

18. Señala la alternativa que contiene el valor de “x”, teniendo en cuenta el siguiente arreglo.

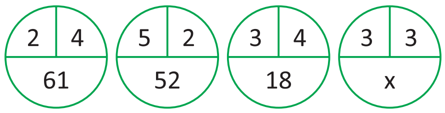
3	6	9
15	210	225
11	x	121

UNI 2000-II

A) 119 B) 117 C) 115 D) 110 E) 111

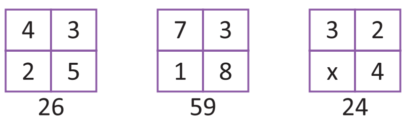
NIVEL 3

(19) Halla el valor que falta.



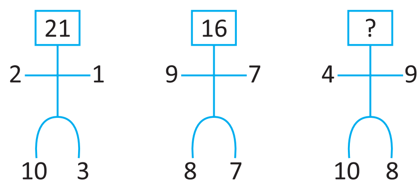
A) 63 B) 36 C) 72 D) 27 E) 80

(20) Halla el valor que falta.



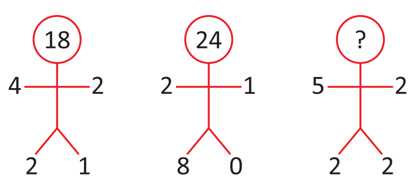
A) 1 B) 6 C) 5 D) 7 E) 8

(21) Halla el valor que falta.



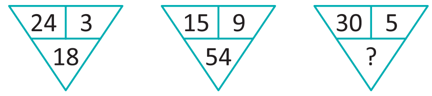
A) 24 B) 26 C) 28 D) 32 E) 36

(22) Halla el valor que falta.



A) 28 B) 26 C) 30 D) 32 E) 36

(23) Halla el valor que falta.



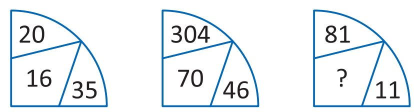
A) 16 B) 18 C) 36 D) 46 E) 15

(24) Halla el valor que falta.

12	32	12
54	17	140
32	15	x

A) 63 B) 30 C) 31 D) 70 E) 72

(25) Halla el valor que falta.



A) 27 B) 25 C) 20 D) 18 E) 16

Claves

NIVEL 1
1. C
2. C
3. D
4. E
5. C
6. A
7. B
8. D
9. B

NIVEL 2
10. E
11. D
12. D
13. E
14. D
15. A
16. D
17. D
18. D

NIVEL 3
19. C
20. B
21. B
22. A
23. E
24. B
25. D

Leyes de exponentes

DEFINICIÓN

Es un conjunto de reglas que relaciona a los exponentes mediante las operaciones de potenciación y radicación.

Recuerda

$a^n = P$

b: base, $b \in \mathbb{R}$

n: exponente, $n \in \mathbb{N}$

p: potencia, $p \in \mathbb{R}$



POTENCIACIÓN

$a^n = p$

Exponente: n

Base: a

Potencia: p

Definiciones

Exponente natural

$a^n = \underbrace{a.a.a.\cdots.a}_{\text{"n" veces}}$; $n \in \mathbb{N}$

Exponente negativo

$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$; $x \neq 0$

Exponente cero

$b^0 = 1$; $b \neq 0$

Teoremas

1. Producto de bases iguales

$a^m . a^n = a^{m+n}$

Ejemplo:

- $4^3 . 4^5 = 4^{3+5} = 4^8$

2. Cociente de bases iguales

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $a \neq 0$

Ejemplo:

- $\dfrac{7^9}{7^4} = 7^{9-4} = 7^5$

3. Potencia de un producto

$(a . b)^n = a^n b^n$

Ejemplo:

- $(4 . 6)^3 = 4^3 . 6^3$

4. Potencia de un cociente

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$; $b \neq 0$

Ejemplo:

- $\left(\dfrac{5}{7}\right)^2 = \dfrac{5^2}{7^2}$

5. Potencia de potencia

$(a^m)^n = a^{m . n}$

Ejemplo:

- $(4^3)^2 = 4^{3 . 2} = 4^6$

Nota

Si: **x**, **y** $\in \mathbb{R} - \{0\}$ y **n** $\in \mathbb{Z}$, entonces:

$\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^n$

RADICACIÓN

Indice

$$\sqrt[n]{a} = b \iff a = b^n \;;\; n \in \mathbb{N};\, n \geq 2$$

Radicando — Raíz

Definición

Exponente fraccionario

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$$

Teoremas

1. Raíz de un producto

$$\sqrt[n]{a\,.\,b} = \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$$

2. Raíz de un cociente

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\,;\, b \neq 0$$

3. Raíz de una raíz

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Raíz de raíz con variables entre radicales

$$\sqrt[m]{x^a\sqrt[n]{x^b\sqrt[p]{x^c}}} = \sqrt[mnp]{x^{(an+b)p+c}}$$

Formas indeterminadas

1. $\sqrt{A+\sqrt{A+\sqrt{A+\ldots\infty}}}$

2. $\sqrt{B-\sqrt{B-\sqrt{B-\ldots\infty}}}$

3. $\sqrt[m]{x^n\sqrt[m]{x^n\sqrt[m]{x^n\ldots\infty}}}$

4. $\sqrt[m]{\dfrac{x^n}{\sqrt[m]{\dfrac{x^n}{\vdots\,\infty}}}}$

5. $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}}$

6. $\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}^{\cdots\infty}}}$

ECUACIONES EXPONENCIALES

- A bases iguales los exponentes deben ser iguales.

$$\text{Si: } a^x = a^y \Rightarrow x = y$$

- La estructura matemática en ambos miembros debe ser la misma.

$$\text{Si: } x^{x^{x+x^x}} = a^{a^{a+a^a}} \Rightarrow x = a$$

Nota

Ejemplos:

$\sqrt[4]{16} = 2$, ya que $16 = 2^4$

$\sqrt[3]{-8} = -2$, pues $-8 = (-2)^3$

$\sqrt{-9}$ = no existe en $\mathbb{R}$

Nota

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x;\ \text{si n es impar} \\ |x|;\ \text{si n es par} \end{cases}$$

Importante

El tipo de problemas de formas indeterminadas se caracteriza por presentar el símbolo infinito (∞) y su criterio de solución consiste en aumentar un elemento común más en el ejercicio dado con la finalidad de eliminar la indeterminación.





Recuerda

Las ecuaciones exponenciales se caracterizan porque la incógnita se encuentra en el exponente.

Problemas resueltos

1 Reduce:

$$E = 16^{-4^{-2^{-1}}} + 27^{3^{-5^{0}}} + (0{,}125)^{-9^{-0{,}5}}$$

Resolución:

Aplicamos la definición de exponente fraccionario:

$$E = 16^{-4^{-1/2}} + 27^{-3^{-1}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-9^{-1/2}}$$

$$E = 16^{-1/2} + 27^{-1/3} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-1/3}$$

$$E = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 2 = \frac{3+4+24}{12}$$

$$\therefore\ E = \frac{31}{12}$$

2 Simplifica:

$$P = \sqrt[2x+3]{\frac{(225)^{2x+4}}{5^{2x+5}\,.\,4 + (25)^{x+3}}}$$

Resolución:

Expresando la base como potencia de 5:

$$P = \sqrt[2x+3]{\frac{(3^2\,.\,5^2)^{2x+4}}{5^{2x+5}\,.\,4 + (5^2)^{x+3}}}$$

$$P = \sqrt[2x+3]{\frac{3^{4x+8}\,.\,5^{4x+8}}{5^{2x+5}\,.\,4 + 5^{2x+6}}}$$

$$P = \sqrt[2x+3]{\frac{3^{4x+8}\,.\,5^{4x+8}}{4\,.\,5^{2x+5} + 5\,.\,5^{2x+5}}}$$

$$P = \sqrt[2x+3]{\frac{3^{4x+8}\,.\,5^{4x+8}}{9\,.\,5^{2x+5}}}$$

$$P = \sqrt[2x+3]{\frac{3^{4x+8}\,.\,5^{4x+8}}{3^2\,.\,5^{2x+5}}}$$

$$P = \sqrt[2x+3]{3^{4x+6}\,.\,5^{2x+3}}$$

$$P = 3^2\,.\,5$$

$$\therefore\ P = 45$$

3 Simplifica la expresión siguiente:

$$C = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}\,.\,\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}}}{\sqrt[18]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-23}}}$$

Resolución:

Aplicamos la propiedad de radicales:

$$C = \frac{\sqrt[2\,.\,3\,.\,3]{\left(\frac{1}{3}\right)^{(1\,.\,3+1)3+1}}}{\sqrt[18]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-23}}} = \frac{\sqrt[18]{\left(\frac{1}{3}\right)^{13}}}{\sqrt[18]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-23}}}$$

$$\Rightarrow\ C = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{13/18}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-23/18}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{13}{18}-\left(\frac{-23}{18}\right)} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

4 Halla el valor de:

$$Q = \frac{\sqrt[3]{16\,.\,\sqrt[6]{16\,.\,\sqrt{16}}}}{\sqrt[6]{64\sqrt[3]{64\,.\,\sqrt{64}}}}$$

Resolución:

Expresamos la base como potencia de 2:

$$Q = \frac{\sqrt[3]{2^4\sqrt[6]{2^4\,\sqrt{2^4}}}}{\sqrt[6]{2^6\sqrt[3]{2^6\,.\,\sqrt{2^6}}}}$$

$$Q = \frac{\sqrt[3.6.2]{2^{(4.6+4)2+4}}}{\sqrt[6.3.2]{2^{(6.3+6)2+6}}} = \frac{\sqrt[36]{2^{60}}}{\sqrt[36]{2^{54}}}$$

$$\Rightarrow\ Q = \frac{2^{60/36}}{2^{54/36}} = 2^{60/36-54/36} = 2^{1/6}$$

$$\therefore\ Q = \sqrt[6]{2}$$

5 Si: $\sqrt{a^2\sqrt{a^3\sqrt{a}}} = m$

Halla el equivalente de: $a\,.\,\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a}}$

Resolución:

Aplicamos la propiedad de radicales:

$$\sqrt[2.2.2]{a^{(2.2+3)2+1}} = m$$

$$\sqrt[8]{a^{15}} = m\ \Rightarrow\ a^{15/8} = m$$

Elevando a la 8/15: $(a^{15/8})^{8/15} = m^{8/15}$

$$a = m^{8/15}$$

Ahora piden: $a \cdot \sqrt[4]{a\sqrt[4]{a}}$

Aplicamos la propiedad de radicales:

$a \cdot \sqrt[16]{a^{1.4+1}} = a \cdot \sqrt[16]{a^5} = a \cdot a^{5/16} = a^{21/16}$

Reemplazando: $a = m^{8/15}$

$\Rightarrow a^{21/16} = (m^{8/15})^{21/16}$

$= m^{\frac{7}{10}} = \sqrt[10]{m^7}$

6 Simplifica:

$$M = \left(\sqrt[3]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x^4 \ldots \infty}}\right)\left(\sqrt[3]{\dfrac{x^{12}}{\sqrt[3]{\dfrac{x^{12}}{\vdots \atop \infty}}}}\right)$$

Resolución:

Sea $A = \left(\sqrt[3]{x^4 \sqrt[3]{x^4 \ldots}}\right)$

Elevamos al cubo:

$A^3 = x^4 \underbrace{\sqrt[3]{x^4 \ldots}}_{A}$

$A^2 = x^4 \Rightarrow A = x^2$

Luego: $B = \left[\sqrt[3]{\dfrac{x^{12}}{\sqrt[3]{\dfrac{x^{12}}{\vdots \atop \infty}}}}\right]$

Elevando al cubo:

$B^3 = \dfrac{x^{12}}{\underbrace{\sqrt[3]{\dfrac{x^{12}}{\vdots \atop \infty}}}_{B}}$

$B^4 = x^{12} \Rightarrow B = x^3$

Finalmente: $M = A \cdot B = x^2 \cdot x^3 = x^5$

$\therefore M = x^5$

7 Halla el valor reducido de la expresión:

$$Q = \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x \ldots \infty}}}}$$

Resolución:

Elevamos al cubo:

$Q^3 = x^2 \sqrt{x \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x \ldots \infty}}}$

Elevamos al cuadrado:

$(Q^3)^2 = x^4 \cdot (x \underbrace{\sqrt{x \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x \ldots \infty}}}}_{Q})$

$Q^6 = x^5 \cdot Q$

$\Rightarrow Q^5 = x^5$

$\therefore Q = x$

8 Resuelve: $\sqrt[x-2]{64^{x-3}} = 32$

Resolución:

Expresando las bases como potencia de 2:

$\sqrt[x-2]{2^{6(x-3)}} = 2^5$

$2^{\frac{6(x-3)}{x-2}} = 2^5$

Como las bases son iguales, podemos igualar exponentes:

$\dfrac{6(x-3)}{x-2} = 5$

$6(x-3) = 5(x-2) \Rightarrow 6x - 18 = 5x - 10$

$\therefore x = 8$

9 Resuelve: $x^{x^x} = 27(27)^8$

Resolución:

Expresamos la base como una potencia de 3.

$x^{x^x} = 3^3(3^3)^8 = 3^3(3^{24}) = 3^{27}$

$\Rightarrow x^{x^x} = 3^{3^3}$

Por analogía: $x = 3$

10 Calcula: $x - y$

Si: $2^{x-3y} = 16$ ...(I)

$3^{\frac{x-y}{3}} = 81$ ... (II)

Resolución:

$2^{x-3y} = 16 \Rightarrow 2^{x-3y} = 2^4$

$\Rightarrow x - 3y = 4$ ... (α)

También: $3^{\frac{x-y}{3}} = 3^4 \Rightarrow \dfrac{x-y}{3} = 4$

$x - y = 12$ ... (β)

Luego: $(\beta) - (\alpha) = (x - y) - (x - 3y) = 12 - 4$

$2y = 8$

$\Rightarrow y = 4$

Reemplazando en (β): $x - 4 = 12$

$x = 16$

$\therefore x - y = 16 - 4 = 12$

1. Efectúa:

$$E = 64^{-8^{-27^{-9^{-4^{-0,5}}}}}$$

A) 1/3 B) 1/8 C) 1/2 D) 1/5 E) 1/4

2. Reduce:

$$\left[x^{x^{x^{-1}}}\right]^{\left(\sqrt[x]{x}\right)^{-1}}$$

A) x B) x^2 C) x^{-1} D) x^{-2} E) x^3

3. Efectúa:

$$R = \left[\sqrt[\sqrt{2}]{4 \cdot 2^{\sqrt{2}}}\right]^{\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

A) 0 B) 2 C) 3 D) 1 E) 4

4. Simplifica:

$$M = \left[\frac{5^{n^2+3} - 5^{n^2} + 5^{n^2+1}}{5^{n^2+2} - 5^{n^2}}\right]^{-1}$$

A) $\frac{8}{35}$ B) $\frac{1}{35}$ C) $\frac{35}{8}$ D) $\frac{8}{43}$ E) $\frac{2}{35}$

5. Simplifica:

$$E = \sqrt[n]{\frac{1+2^n}{1+2^{-n}}}$$

A) 2,5 B) 0 C) 1 D) 4 E) 2

6. Efectúa:

$$E = \frac{\overbrace{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \ldots \sqrt[3]{a}}^{45 \text{ veces}}}{\underbrace{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \ldots \sqrt{a}}_{20 \text{ factores}}} \div \frac{a^4}{a^{-1}}$$

A) a B) 3 C) 2 D) 1 E) $\sqrt{a}$

7. Simplifica y da el exponente de x.

$$E = \sqrt[3]{x\sqrt[4]{x^2\sqrt{x^3\sqrt{x^{18}}}}}$$

A) 4 B) 2 C) 1 D) 5 E) 3

8. Luego de simplificar la siguiente expresión, halla la suma de los exponentes de la variable.

$$E = \sqrt[3]{a^2 \cdot b^4 \sqrt[4]{b^3 c^2 \sqrt[5]{c^3 d^6}}}$$

A) $\frac{44}{25}$ B) $\frac{66}{35}$ C) $\frac{39}{17}$ D) $\frac{77}{30}$ E) $\frac{70}{17}$

9. Si: $a^a = 3$

Calcula:

$$M = \sqrt[a^a - 1]{a^{a^{a+1}}}$$

A) 3   B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{3}$ E) 9

10. Si:

$$a^{a^a} = 2$$

Halla el valor de C en: $C = a^{3a^{a^a}+a}$

A) 32   B) 8   C) 4   D) 64   E) 16

11. Resuelve:

$$3^{27^{x-2}} = 27^{9^{x+1}}$$

A) 5   B) 9   C) 6   D) 4   E) 7

12. Halla x en:

$$\sqrt[7]{\frac{5^{16} + 5^x}{5^x + 5^2}} = 5$$

A) 5   B) 9   C) 8   D) 6   E) 7

13. Calcula el valor de E en:

$$E = \frac{\sqrt{2.\sqrt{2.\sqrt{2 \ldots \infty}}}}{\sqrt[3]{\dfrac{81}{\sqrt[3]{\dfrac{81}{\sqrt[3]{\dfrac{81}{\vdots \infty}}}}}}}$$

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

14. Halla el valor de E en:

$$E = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots \infty}}}}$$

A) 2   B) 0   C) 4   D) 3   E) 1

Claves

1. B	5. E	9. D	13. E
2. A	6. D	10. D	14. D
3. E	7. C	11. B	
4. D	8. D	12. B	

Reto



Calcula "x", si:

$$x^{9-x^{9-x^{9-x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}}} = \sqrt{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}\cdots\infty}}}$$

Rpta.: 1/10

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Halla el valor de A si:

$$A=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}$$

A) 6 B) 4 C) 3 D) 8 E) 2

2. Halla el valor de E si:

$$E=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

A) 4 B) 6 C) 1 D) 2 E) 5

3. Halla el valor de C si:

$$C=\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{27}{2}\right)^{-1}\right]^{1/3}+3^{-1}$$

A) 1 B) 3 C) 6 D) 9 E) 81

4. Efectúa:

$$B=\frac{2.36^2.42^3}{3.28^3.54^2}$$

A) 5 B) 2 C) 1 D) 4 E) 3

5. Simplifica:

$$\frac{5^{x+1}+5^{x+2}+5^{x+3}}{5^{x+2}}$$

A) 21/5 B) 1/5 C) 13/5 D) 31/5 E) 5

6. Simplifica:

$$\frac{2^{n+3}+2^{n+2}-2^{n+1}}{2^{n+2}+2^n}$$

A) 1 B) 8 C) 4 D) 16 E) 2

7. Simplifica:

$$\frac{2.3^{n+1}+3.2^{n+1}}{3^{n+1}+3.2^n}$$

A) 2 B) 5 C) 6 D) 3 E) 4

8. Efectúa:

$$81^{8^{-9^{-2^{-1}}}}$$

A) 24 B) 3 C) 9 D) 6 E) 18

9. Simplifica:

$$\sqrt[3]{8.x^3}+\sqrt[5]{32.x^5}$$

A) 4x B) x C) x^2 D) x – 1 E) 2x

NIVEL 2

10. Reduce:

$$\left[\frac{10.(2^a)-5(2^{a-1})}{6(2^{a+1})+3(2^a)}\right]^{-1}$$

A) 3 B) 5 C)6 D) 2 E) 4

11. Reduce:

$$\frac{\left(a^{2n-1}\right)^4\left(b^{3n+2}\right)^5}{a^{8n-6}.b^{15n+8}}$$

A) ab B) $(b/a)^2$ C) $(1/ab)^2$
D) 1 E) $(ab)^2$

12. Reduce:

$$\sqrt[3a]{\frac{5^{4a}}{\sqrt[a+2]{5^{a^2+2a}}}}$$

A) 1 B) 5 C) $\sqrt{5}$
D) 25 E) $\sqrt[3]{5}$

13. Reduce:

$$\sqrt[a+1]{\frac{2.90^{a+1}}{3^{2a+2}+9^{a+1}}}$$

A) 2 B) 10 C) 6 D) 9 E) 3

14. Reduce:

$$A = 16^{8^{-27^{-9^{-4^{-2^{-1}}}}}}$$

A) 4 B) 2 C) 3 D) 6 E) 5

15. $$\frac{72^2.21^3.28^2.81}{84.63^4.48^2}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

16. Simplifica y da el exponente de x:

$$\sqrt{x\sqrt[3]{x^5\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}}$$

A) 5 B) 1/2 C) 3/2 D) 3 E) 2

17. Sabiendo que: $5^x = 2$, calcula: 125^{x+1}

A) 325 B) 125 C) 25
D) 625 E) 1000

18. Si: $3^a = 81$,

halla el valor de: $E = \dfrac{9^{a+2}.27}{27^a}$

A) 3 B) 9 C) 27 D) 81 E) 1

NIVEL 3

19. Simplifica:

$$E = \frac{3^{a^b+4} - 2.3^{a^b+3} + 4.3^{a^b+1}}{5.3^{a^b+1} - 2.3^{a^b}}$$

A) 3 B) 6 C) 9 D) 18 E) 12

20. Halla el valor de:

$$H = \frac{5^a + 7^b}{5^a - 7^b}$$

sabiendo que: $5^{a+1} = 7^b$

A) 3/2 B) 5/2 C) −2/3 D) −3/2 E) −1

21. Halla el valor de “x” en la siguiente ecuación:

$$\sqrt{3\sqrt{9^x\sqrt{3\sqrt{9^x}}}} = 243$$

A) 5 B) 7 C) 3 D) 6 E) 4

22. Reduce:

$$E = \sqrt[n]{n^n \sqrt[n]{n^{n^2} . \sqrt[n]{n^{n^3}}}}$$

A) n B) n^n c) n^2 D) n^3 E) 1

23. Calcula el valor de: (a + b)

Si: $a^b = b^a = a^{a-b}$

A) 6 B) 5 C) 2 D) 7 E) 8

24. Si: $b^{b^b} = 2$

Calcula: $P = b^{b^b + b^{b + b^{b + b^b}}}$

A) 4 B) 64 C) 32 D) 2 E) 16

25. Halla “a”, si:

$$27^{9^{-a^{-2^{-2}}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

A) 9 B) 32 C) 64 D) 3 E) 16

26. Halla el valor de “T”, si:

$$T = \sqrt[3]{\frac{x^{16}}{\sqrt[3]{\frac{x^{16}}{\sqrt[3]{\frac{x^{16}}{\vdots\ \infty}}}}}}$$

A) x^4 B) 1 C) x^2 D) x^3 E) x

27. Calcula “R”, si:

$$R = \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt{24 + ...\infty}}}$$

A) 2 B) 8 C) 10 D) 3 E) 6

28. Si: $A = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$; $B = y^{y^{y^{y^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$; $A = B^{B^{-1}}$

Halla el valor de: x^y

A) A + B B) AB C) 0
D) A^B E) A

Claves

NIVEL 1	8. C	15. A	22. D
1. E	9. A	16. C	23. A
2. B	NIVEL 2	17. E	24. C
3. A	10. D	18. C	25. E
4. C	11. E	NIVEL 3	26. A
5. D	12. B	19. A	27. D
6. E	13. B	20. D	28. E
7. A	14. A	21. B	

Productos notables

DEFINICIÓN

Son los resultados de ciertas multiplicaciones indicadas que se obtienen en forma directa, considerando implícita la propiedad distributiva de la multiplicación, por la forma que presentan.

PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES

Desarrollo de un binomio al cuadrado

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Corolario: "Identidad de Legendre"

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

Diferencia de cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Desarrollo de un trinomio al cuadrado

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

Desarrollo de un binomio al cubo

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

Suma y diferencia de cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Atención

Ejemplos de binomio al cuadrado.

- $(2x^2+3x^3)^2$
  $=(2x^2)^2+2(2x^2)(3x^3)+(3x^3)^2$
  $= 4x^4 + 12x^5 + 9x^6$
- $(5x^4 - y^6)^2$
  $= (5x^4)^2 - 2(5x^4)(y^6) + (y^6)^2$
  $= 25x^8 - 10x^4y^6 + y^{12}$

Ejemplos de identidad de Legendre.

- $(2x + 3y)^2 + (2x - 3y)^2$
  $= 2((2x)^2 + (3y)^2)$
  $= 2(4x^2 + 9y^2)$
- $(3x^2y + xy^2)^2 - (3x^2y - xy^2)^2$
  $= 4 . 3x^2y . xy^2$
  $= 12x^3y^3$

Ejemplo de diferencia de cuadrados.

$(4x^3 + 3z^4)(4x^3 - 3z^4)$
$= (4x^3)^2 - (3z^4)^2$
$= 16x^6 - 9z^8$



Atención

Ejemplo de binomio al cubo.

Si: $x + y = 3 \wedge xy = 4$,

halla $x^3 + y^3$

Veamos:

$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

$3^3 = x^3 + y^3 + 3(4)(3)$

$27 = x^3 + y^3 + 36$

$\therefore\ x^3 + y^3 = -9$



Atención

Ejemplo de trinomio al cubo.

Si: $(x + y)(x + z)(x + z) = 210$

$x^3 + y^3 + z^3 = 99$

Calcula: $x + y + z$

Resolución:

$(x + y + z)^3 =$

$x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(x + z)$

$(x + y + z)^3 = 99 + 3(210)$

$(x + y + z)^3 = 99 + 630$

$(x + y + z)^3 = 729$

$\therefore\ x + y + z = 9$



Desarrollo de un trinomio al cubo

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ac) - 3abc$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b + c) + 3b^2(a + c) + 3c^2(a + b) + 6abc$$

Producto de multiplicar binomios con un término común

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

Identidad trinómica de Argan'd

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$$

$$(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^4 + x^2y^2 + y^4$$

Atención

Ejemplo de identidad de Gauss.

Si: $a + b + c = 0$

Calcula:

$$J = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a + b)(a + c)(b + c)}$$

Resolución:

$a + b + c = 0$

$\Rightarrow\ a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Además: $a + b = -c$

$b + c = -a$

$a + c = -b$

Luego:

$$J = \frac{3abc}{(-c)(-a)(-b)}$$

$$J = \frac{abc}{-abc}$$

$\therefore\ J = -3$



Identidad de Gauss

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

$$(a + b)(b + c)(c + a) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$$

Igualdades condicionales

I. Si: $a + b + c = 0$

Entonces: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

II. Si: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

Entonces: $a = b = c$

Problemas resueltos

1 Simplifica:

$$P = \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}\right)\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$$

Resolución:

$$P = \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$$

Aplicamos Legendre:

$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$

$$P = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2+b^2}$$

$\therefore\ P = 2$

2 Dado: $\dfrac{a}{2b} + \dfrac{2b}{a} = 2$, calcula a^8b^{-8}.

Resolución:

$$\frac{a^2+4b^2}{2ab} = 2$$

$$a^2 + 4b^2 = 4ab$$

$$a^2 - 4ab + 4b^2 = 0$$

$$(a-2b)^2 = 0$$

$$a = 2b \Rightarrow \frac{a}{b} = 2$$

Piden: $a^8b^{-8} = \dfrac{a^8}{b^8} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^8 = 2^8 = 256$

3 Simplifica:

$$L = \sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1}$$

Resolución:

$$L = \sqrt{(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)+1}$$

$$L = \sqrt{(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1}$$

$$L = \sqrt{(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24+1}$$

$$L = \sqrt{(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+25}$$

$$L = \sqrt{(x^2+5x)^2+2.5(x^2+5x)+5^2}$$

$$L = \sqrt{(x^2+5x+5)^2}$$

$$L = x^2+5x+5$$

4 Si: $ab - 1 = \sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{10}$

$a + b - 1 = \sqrt[3]{10}$

Halla: $3ab(a+b)$

Resolución:

$ab = \sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{10} + 1$

$ab = \sqrt[3]{10^2} - \sqrt[3]{10.1} + 1^2$

Además: $a + b = \sqrt[3]{10} + 1$

Piden: $3ab(a+b) = 3\left(\sqrt[3]{10^2} - \sqrt[3]{10.1} + 1\right)\left(\sqrt[3]{10} + 1\right)$

$= 3\left(\sqrt[3]{10}^3 + 1^3\right)$

$= 3(10 + 1)$

$= 33$

5 Efectúa: $(a+b+c)(a-b+c) + (b-a+c)(a+b-c)$

Resolución:

$((a+c)+b)((a+c)-b) + (b-(a-c))(b+(a-c))$

Aplicando diferencia de cuadrados:

$(a+c)^2 - b^2 + b^2 - (a-c)^2$

Aplicando Legendre: $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

$\Rightarrow\ (a+c)^2 - (a-c)^2 = 4ac$

6 Si: $a + b + c = 0$, calcula:

$$E = \frac{(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Resolución:

Por propiedad:

Si: $a+b+c=0$, entonces $a^3+b^3+c^3 = 3abc$

Del dato: $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c$

$b+c=-a$

$c+a=-b$

Reemplazando en E:

$$E = \frac{-c^3-a^3-b^3}{-c(-a)(-b)}$$

$$E = \frac{-(a^3+b^3+c^3)}{-abc}$$

$$E = \frac{-3abc}{-abc}$$

$\therefore\ E = 3$

7 Si: $a + b + c = 0$; $abc = 5$

Halla el valor de:

$L = ab(a + b)^4 + bc(b + c)^4 + ac(a + c)^4$

Resolución:

Por propiedad:

Si: $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Dato: $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c$

$b + c = -a$

$a + c = -b$

Reemplazando en L:

$L = ab(-c)^4 + bc(-a)^4 + ac(-b)^4$

$L = abc^4 + bca^4 + acb^4$

$L = \underbrace{abc}(c^3 + a^3 + b^3)$

$L = 5 \times \underbrace{3abc}$

$L = 5 \times 3 \times 5$

$\therefore\ L = 75$

8 Dada la expresión: $(a + 2b)^2 + (a - 2b)^2 = 8ab$, halla el valor de:

$$M = \frac{ab + 2b^2}{a^2}$$

Resolución:

Aplicamos Legendre:

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

En el problema:

$\underbrace{(a + 2b)^2 + (a - 2b)^2} = 8ab$

$2(a^2 + (2b)^2) = 8ab$

$2a^2 + 8b^2 = 8ab$

$a^2 + 4b^2 = 4ab$

$a^2 - 4ab + 4b^2 = 0$

$(a - 2b)^2 = 0 \Rightarrow a = 2b$

Luego:

$$M = \frac{(2b)b + 2b^2}{(2b)^2} = \frac{2b^2 + 2b^2}{4b^2}$$

$\therefore\ M = 1$

9 $F = (p + q)(p^2 - pq + q^2) - (p - 2q)(p^2 - 2pq + 4q^2)$ da como respuesta $\sqrt{F}$.

Resolución:

Aplicando suma y diferencia de cubos:

$F = (p + q)(p^2 - pq + q^2) - (p - 2q)(p^2 - 2pq + (2q)^2)$

$F = (p^3 + q^3) - (p^3 - (2q)^3)$

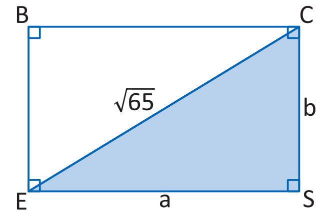
$F = p^3 + q^3 - p^3 + 8q^3$

Luego: $F = 9q^3$

Piden: $\sqrt{F} = \sqrt{9q^3} = \sqrt{9q^2.q}$

$\therefore\ \sqrt{F} = 3q\sqrt{q}$

10 En la figura:



El área sombreada es igual a 14 u^2 y la suma de los catetos del ⊿ ESC es 11 u.

Calcula: $a^3 + b^3$

Resolución:

Datos: $\underbrace{\text{área sombreada}} = 14\ u^2$

$\frac{a \times b}{2} = 14\ u^2$

$ab = 28$

$\underbrace{\text{Suma de catetos}} = 11\ u$

$a + b = 11$

Luego, por Pitágoras:

$a^2 + b^2 = \sqrt{65}^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 65$

Piden:

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$= (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$

$= 11(65 - 28) = 11 \times 37$

$\therefore\ a^3 + b^3 = 407$

Actividades de razonamiento

1. Si: $(x+y)^2 = 4xy$, calcula:

$$C = \frac{8x+7y}{4x+y}$$

A) 7 B) 3 C) 5 D) 6 E) 4

2. Si: $a+b=5$ y $a-b=1$, halla el valor de: ab

A) 5 B) 8 C) 6 D) 10 E) 7

3. Si: $x^2+y^2=9$ y $xy=8$; $\forall x; y \in \mathbb{R}^+$, halla el valor de: $x+y$

A) 9 B) 8 C)7 D) 6 E) 5

4. Efectúa:

$$L = (x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)+y^8$$

A) x^4 B) y^8 C) xy D) x^8 E) y^4

5. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $a^3+b^3+c^3=3abc \Leftrightarrow a-b+c=0$

II. $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

III. $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right)=5$

A) FVV B) VVV C) FVV
D) FFF E) FVF

6. Efectúa:

$$R = \left(\sqrt{8+2\sqrt{15}}\right)\left(\sqrt{8-2\sqrt{15}}\right)$$

A) 1 B) 4 C) 5 D) 2 E) 3

7. Si: $x+\frac{1}{x}=5$, halla: $x^2+\frac{1}{x^2}$

A) 20 B) 25 C) 15 D) 23 E) 22

8. Sabiendo que: $x+x^{-1}=4$, calcula: x^3+x^{-3}

A) 58 B) 52 C) 60 D) 48 E) 55

9. Si: $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=y^2$, halla:

$E=\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}$

A) 2 B) x^2 C) y^2 D) 1 E) $x+y$

10. Por cuánto debe multiplicarse $\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)$ para obtener: $\left(x^4-\dfrac{1}{x^4}\right)$

A) x^2-x^{-2} B) $1+x^2$ C) $1+x^{-2}$
D) x^2+x^{-2} E) x^2-1

11. Sabiendo que: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{x+y}$,

calcula: $S=\dfrac{x^2+y^2}{xy}+\dfrac{x+3y}{2x}$

A) 1 B) 3 C) 4 D) 2 E) 5

12. Si: $x^2-3x+1=0$,

calcula: $J=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2$

A) 3 B) 4 C) 1 D) 5 E) 2

13. Si: $a+b+c=0$,

calcula: $J=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(a+c)(b+c)}$

A) –3 B) 4 C) 5 D) 2 E) 3

14. Si: $a^3+b^3+c^3=2(a+b)(b+c)(a+c)$; $a+b+c=1$,

calcula: $M=\dfrac{1+5abc}{ab+ac+bc}$

A) 4 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

Claves

1. B 2. C 3. E 4. D
5. C 6. D 7. D 8. B
9. A 10. D 11. C 12. D
13. A 14. E

Reto



Se sabe que:

- $a+b+c=7$
- $a^2+b^2+c^2=20$

Calcula el valor de:
$P=(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2$

Rpta.: 69

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Reduce:
$F = (x+5)^2 + (x+3)^2 - 2(x+4)^2 + 1$
A) 2 B) 5 C) 4 D) 6 E) 3

2. Reduce: $M = \dfrac{(3x+2)^2 - (2x+3)^2}{5}$
A) $2x$ B) $x-1$ C) x^2-1
D) x^2+1 E) $x+1$

3. Simplifica: $H = \dfrac{(5x+3y)^2 - (5x-3y)^2}{12xy}$
A) 5 B) 2 C) 6 D) 4 E) 3

4. Simplifica: $E = \dfrac{(1+xy)^2 - (x+y)^2}{1-x^2}$
A) $1+x$ B) $1+x^2$ C) x^2
D) $1-y$ E) $1-y^2$

5. Efectúa: $E = \sqrt{1 + \left(\dfrac{x^4-1}{2x^2}\right)^2}$
A) $\dfrac{1}{2}(x^2+x^{-2})$ B) x^{-2} C) x^2
D) x^4-1 E) $\dfrac{1}{2}x^2$

6. Efectúa:
$L = \left(\sqrt[3]{3}+1\right)\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1\right)$
A) 3 B) 2 C) 1
D) 4 E) 9

7. Efectúa:
$N = \dfrac{(x+y)^3 + (x-y)^3}{(x^2+3y^2)}$
A) 2 B) xy C) $2x$
D) y E) x

8. Efectúa:
$R = \left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2 - \left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2;\ \forall m; n \in \mathbb{R}^+$
A) $4m$ B) $2m+2n$ C) 0
D) $4\sqrt{mn}$ E) $m+n$

9. Evalúa la expresión:
$(x-3y)^2 - 4y(2y-x) + 8$; si: $x - y = 8$
A) 78 B) 70 C) 68 D) 74 E) 72

10. Si: $a^2+b^2 = 24$
$ab = 8$, calcula: $(a+b)^2$
A) 28 B) 20 C) 40 D) 25 E) 30

NIVEL 2

(11) Sabiendo que: $a + b = 5$
$ab = 2$

Calcula: $\dfrac{a^2 + b^2}{a^3 + b^3 + 10}$

A) 0,2 B) 2 C) 0,5 D) 4 E) 1

(12) Si: $a(a^2 + 3b^2) = b(b^2 + 3a^2) + 8$, ¿qué valor tiene $a - b$?

A) 4 B) 2 C) 6 D) 3 E) 5

(13) A qué es igual:

$E = \sqrt{(x+y)^2 - 4xy}$; $x > y > 0$

A) 2y B) 2x C) xy D) x – y E) x + y

(14) Si: $a + b = 4$; $ab = 2$;
halla: $a^2 + b^2$

A) 12 B) 14 C) 16 D) 8 E) 10

(15) Simplifica:

$E = 2y^2 + 2xy + \sqrt{(x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2}$

y calcula: $\sqrt{E}$

A) $x - y$ B) $2x$ C) $x + y$
D) $(x + y)^2$ E) $2y$

(16) Si: $(a + \frac{1}{a})^2 = 3$; calcula: $a^3 + \dfrac{1}{a^3}$

A) 4 B) 2 C) 3 D) 1 E) 0

(17) Si: $x + y = 12 \wedge xy = 4$,
calcula: $(x - y)^2$

A) 140 B) 132 C) 136 D) 128 E) 150

(18) Efectúa: $E = \left(\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{4}\right)$

A) 8 B) 6 C) 4 D) 10 E) 7

(19) Calcula m, si: $(x + 3)^2 = x^2 + mx + 9$

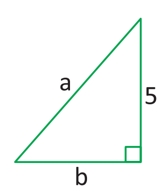
A) 2 B) 4 C) 3 D) 6 E) 5

(20) Si: $a + b = -4 \;\wedge\; ab = -3$,
calcula: $\sqrt{a^2 + b^2 - 6}$

A) 7 B) 5 C) 4 D) 6 E) 8

NIVEL 3

(21) En el siguiente triángulo: $a + b = 25$,
calcula: $a - b$



A) 5 B) 10 C) 2 D) 1 E) 25

22. Si: $a = \sqrt{5} - \sqrt[3]{2} + 1$; $b = \sqrt[3]{2} - 4$; $c = 3 - \sqrt{5}$

Calcula: $E = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{12.abc}$

A) 0,5 B) 0,2 C) 0,4 D) 0,3 E) 0,25

23. Si: $x + \dfrac{1}{x} = -2$, calcula: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + x^3 + \dfrac{1}{x^3}$

A) 4 B) 1 C) 0 D) 3 E) 2

24. Sea: $b^2 + 1 = 6b$, calcula: $\dfrac{b^4 + 1}{b^2}$

A) 37 B) 34 C) 36 D) 33 E) 35

25. La diferencia de dos números es $\sqrt[3]{3}$ y su producto, $\sqrt[3]{9}$. Calcula la diferencia de sus cubos.

A) 9 B) 6 C) 8 D) 12 E) 10

26. Si: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$, calcula:

$$\frac{\sqrt{(x+y)(x+z)}}{x}$$

A) 5 B) 3 C) 1 D) 4 E) 2

27. Efectúa:

$$R = \frac{\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - 5$$

A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $2\sqrt{6}$ E) $\sqrt{2}$

28. Efectúa: $(m^5 + 5)(25 + m^{10} - 5m^5) - 125$

A) m B) m^3 C) m^{15} D) m^2 E) m^5

29. Si: $x^2 + 1 = 4x$, calcula: $x^3 + x^{-3}$

A) 63 B) 49 C) 48 D) 45 E) 52

30. Si: $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$, calcula "n":

$$\left[\frac{x + y + z}{\sqrt[3]{x\,y\,z}}\right]^{4n} = 27^{n+2}$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 5 E) 3

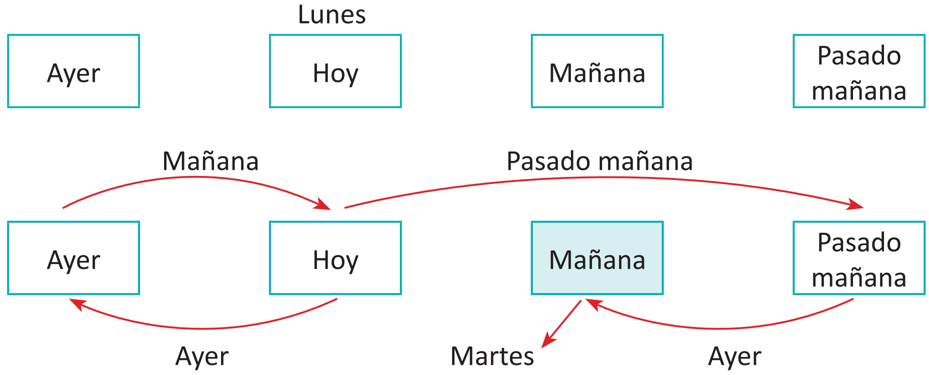
Claves

NIVEL 1	9. E	17. D	25. D
1. E	10. C	18. A	26. C
2. C	NIVEL 2	19. D	27. D
3. A	11. A	20. C	28. C
4. E	12. B	NIVEL 3	29. E
5. A	13. D	21. D	30. C
6. D	14. A	22. E	
7. C	15. C	23. C	
8. D	16. E	24. B	

Relaciones de tiempo y parentesco

RELACIÓN DE TIEMPO

Ejemplo:
Hoy es lunes, ¿qué día de la semana será el ayer del pasado mañana del mañana del ayer de hoy?



∴ El día pedido es martes.

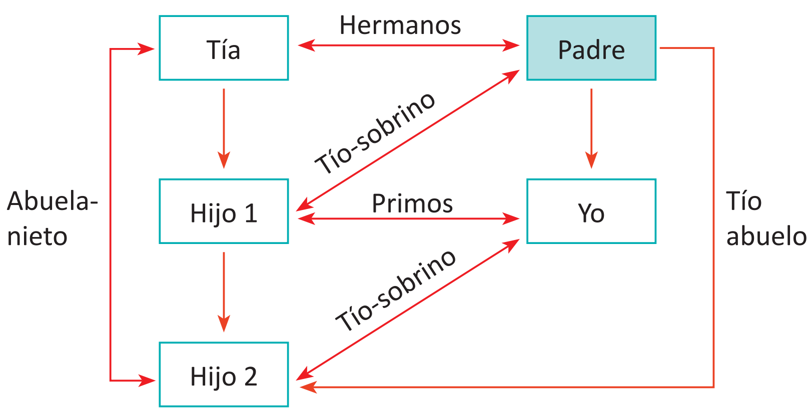
Una manera práctica de resolver el problema es dando valores al tiempo en referencia respecto de hoy.

Anteayer	Ayer	Hoy	Mañana	Pasado mañana
−2	−1	0	+1	+2
Hace dos días	Hace un día		Dentro de un día	Dentro de dos días

RELACIÓN DE PARENTESCO

Ejemplo:
El nieto de mi tía es mi único sobrino. Indica qué parentesco tiene conmigo el tío de mi primo, si se sabe que es el tío abuelo de mi sobrino, además mi tía tiene un solo hermano.

Resolución:
De acuerdo al enunciado, graficamos:



Parentesco: mi padre



Importante

Para encontrar el día pedido empezamos a ubicar los tiempos de atrás hacia adelante.
1.° hoy
2.° ayer
3.° mañana
4.° pasado mañana
5.° ayer

Nota

En el ejemplo:
¿Qué día será el ayer del (−1) pasado mañana (+2) del mañana (+1) del ayer de hoy? (−1)

Sumamos y se obtiene:
−1 + 2 + 1 − 1 = +1

Luego nos preguntan, ¿qué día es (+1)? → mañana

∴ Si hoy es lunes mañana será martes.



Recuerda

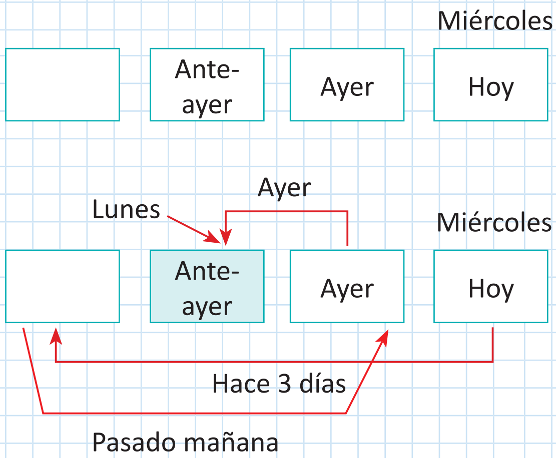
Equivalencias:
El subsiguiente <> + 2
El día que precede <> – 1
El inmediato anterior <> – 1
El inmediato posterior <> + 1

Problemas resueltos

1 Si hoy es miércoles. ¿Qué día será el ayer del pasado mañana de hace 3 días?

Resolución:

Gráficamente:

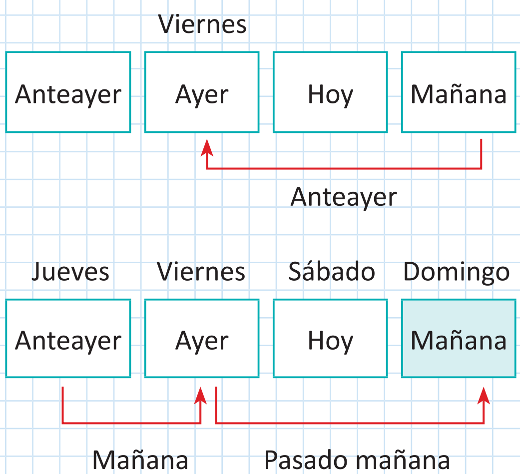


∴ Será lunes.

2 Si el anteayer de mañana es viernes. ¿Qué día será el pasado mañana del mañana de anteayer?

Resolución:

Gráficamente:

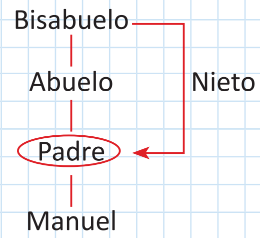


∴ Será domingo.

3 ¿Qué representa para Manuel el único nieto del abuelo del padre de Manuel?

Resolución:

Haciendo un esquema:

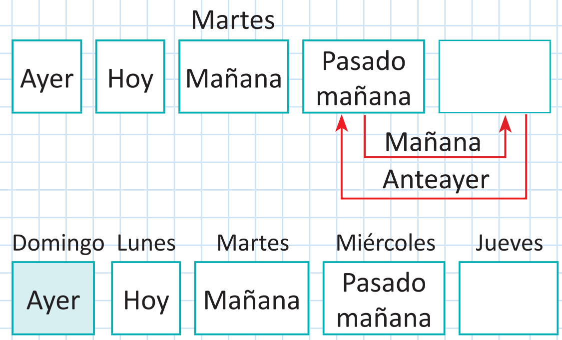


∴ Su padre.

4 Si el anteayer del mañana de pasado mañana es martes, ¿qué día fue ayer?

Resolución:

Gráficamente:

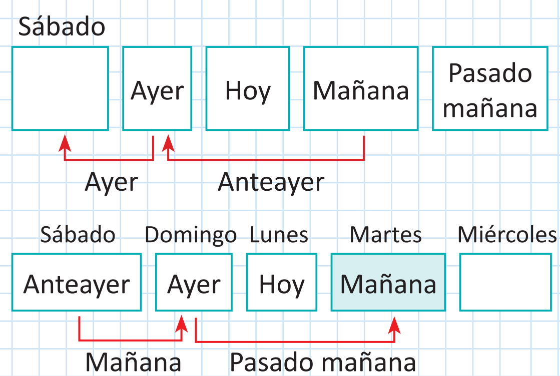


∴ Ayer fue domingo.

5 Si el ayer del anteayer de mañana es sábado, ¿qué día será el pasado mañana del mañana de anteayer?

Resolución:

Gráficamente:

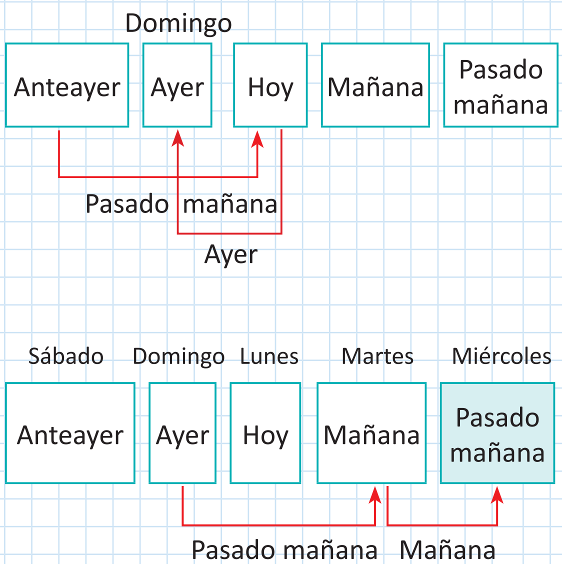


∴ Será martes.

6 Si el ayer del pasado mañana de anteayer es Domingo. ¿Qué día será el mañana del pasado mañana de ayer?

Resolución:

Gráficamente:

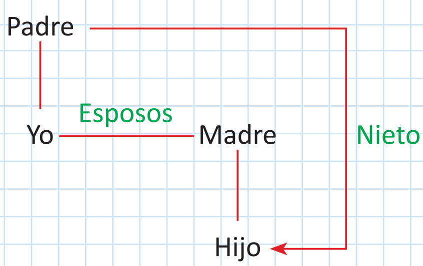


∴ Será miércoles.

7 ¿Qué relación de parentesco tengo con la madre del nieto de mi padre, si soy hijo único?

Resolución:

Realizando un esquema:

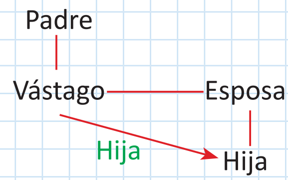


∴ Soy su esposo.

8 ¿Qué relación de parentesco tiene conmigo una mujer que es la hija de la esposa del único vástago de mi padre?

Resolución:

Haciendo un diagrama:

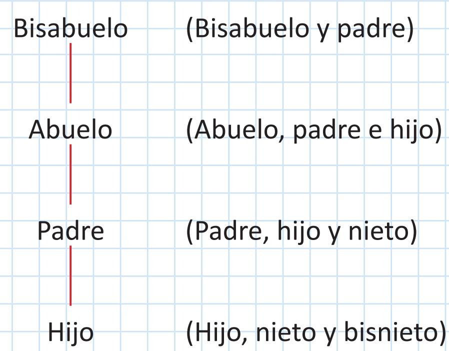


∴ Es mi hija.

9 En una reunión hay 3 padres y 3 hijos, ¿cuál es el mínimo número de personas que hay?

Resolución:

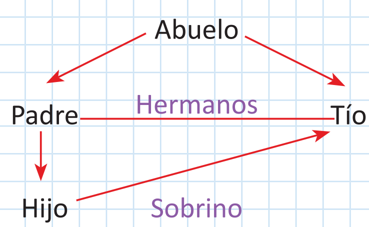
Haciendo un esquema:



∴ El mínimo número de personas es 4.

10 En una fiesta hay 2 padres, 3 hijos, 1 nieto, 1 sobrino y 2 hermanos. ¿Cuántas personas hay?

Resolución:



Actividades de razonamiento

1. ¿Qué relación de parentesco tengo con el hijo del hijo de la tía de mi padre?

A) Mi hermano B) Mi primo C) Mi tío
D) Mi sobrino D) N. A.

2. ¿Quién es ese hombre que es el padre de la hija de la esposa del único vástago de mi madre?

A) Mi padre B) Mi hijo C) Mi tío
D) Yo mismo E) Mi primo

3. El mañana de traspasado mañana es lunes. ¿Qué día fue ayer?

A) Lunes B) Martes C) Miércoles
D) Jueves E) Viernes

4. Si el pasado mañana de ayer es viernes. ¿Qué día fue el trasanteayer de mañana?

A) Viernes B) Jueves C) Miércoles
D) Martes E) Lunes

5. Si el anteayer de ayer fue miércoles. ¿Qué día será el mañana de mañana?

A) Lunes B) Martes C) Miércoles
D) Jueves E) Viernes

6. Si el pasado mañana de ayer es martes. ¿Qué día será el pasado mañana de mañana?

A) Lunes B) Domingo C) Sábado
D) Viernes E) Jueves

7. A un evento deportivo fueron invitados: 2 padres, 2 hermanos, 2 hijos, 2 tíos y 2 sobrinos, ¿cuántas personas como mínimo asistieron a dicho evento?

A) 4 B) 3 C) 5 D)6 E) 8

8. A una fiesta asistieron: 1 padre, 1 madre, 1 tía, 1 tío, 1 hermano, 1 hermana, 1 sobrina, 1 sobrino y 2 primos. ¿Cuántas personas como mínimo asistieron a dicha fiesta?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

9. En una reunión se encuentran: 1 abuelo, 1 abuela, 2 esposos, 2 esposas, 2 padres, 2 madres, 1 nuera, 4 hijos y 3 nietos. ¿Cuántas personas como mínimo hay en dicha reunión?

A) 6 B) 8 C)7 D) 9 E) 10

10. En una fiesta se encuentran: 1 abuelo, 1 abuela, 2 padres, 2 madres, 2 nietas, 1 nieto, 1 hermano, 2 hermanas, 2 hijas, 2 hijos, 2 esposos, 2 esposas, 1 nuera, 1 suegro y 1 suegra, ¿cuántas personas hay en la fiesta?

A) 5 B) 6 C) 8 D) 7 E) 9

11. Si el mañana de anteayer fue domingo. ¿Qué día será pasado mañana?

A) Lunes B) Viernes C) Martes
D) Jueves E) Miércoles

12. El pasado mañana del pasado mañana es miércoles. ¿Qué día fue el anteayer de mañana?

A) Viernes B) Sábado C) Domingo
D) Lunes E) Martes

13. En una cena se reúnen: 2 padres, 3 hijos, 3 tíos, 3 sobrinos, 3 primos. ¿Cuál es el mínimo número de personas en dicha cena?

A) 7 B) 5 C) 9 D) 8 E) 6

14. En una cena familiar hay: 1 abuelo, 3 padres, 4 hijos, 1 hija, 2 primos, 1 prima, 4 hermanos, 2 nietos, 1 nieto. ¿Cuántas personas como mínimo hay?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 5 E) 9

Claves

1. B	5. A	9. C	13. E
2. D	6. E	10. D	14. B
3. C	7. A	11. E	
4. D	8. B	12. A	

Reto



¿Qué viene a ser, de mí, el hijo del único sobrino del papá del padre de mi hijo?

Rpta.: Mi hijo

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. El hijo de la hermana de mi padre es mi:

A) Sobrino B) Tío C) Primo
D) Padrastro E) Nieto

2. ¿Qué parentesco tiene conmigo la hija de la esposa del único vástago de mi madre?

A) Hermana B) Prima C) Sobrina
D) Hija E) Nieta

3. ¿Qué parentesco tiene usted con la suegra de la mujer de su hermano?

A) Abuela B) Hermana C) Sobrina
D) Madre E) Cuñada

4. ¿Qué parentesco tengo con el único hermano de la hija del padre de mi padre?

A) Soy yo B) Mi padre C) Mi hijo
D) Mi tío E) Mi abuelo

5. ¿Qué relación de parentesco tiene conmigo el tío del hijo del único hermano de mi padre?

A) Mi primo B) Mi tío
C) Mi hermano D) Mi abuelo
E) Mi padre

6. ¿Qué relación de parentesco tiene conmigo el hijo del abuelo del hijo del único hermano de mi tía?

A) Hermano B) Mi primo C) Mi tío
D) Soy yo E) Mi padre

7. Si el anteayer del ayer de pasado mañana es lunes, ¿qué día será mañana?

A) Lunes B) Martes C) Miércoles
D) Jueves E) Viernes

8. Si el pasado mañana de mañana es domingo, ¿qué día será el ayer del anteayer de mañana?

A) Domingo B) Martes C) Lunes
D) Sábado E) Miércoles

9. Si el pasado mañana de ayer es viernes. ¿Qué día fue ayer?

A) Lunes B) Sábado C) Domingo
D) Miércoles E) Jueves

NIVEL 2

10. Si el mañana del anteayer de mañana fue martes, ¿qué día será pasado mañana?

A) Jueves B) Lunes C) Viernes
D) Martes E) Miércoles

11. Sabiendo que el antes de ayer de mañana es miércoles, ¿qué día será el pasado mañana del ayer de pasado mañana?

A) Jueves B) Sábado C) Lunes
D) Martes E) Domingo

12. Si hoy fuese mañana, pasado mañana sería jueves, ¿qué día es hoy?

A) Viernes B) Martes C) Lunes
D) Sábado E) Jueves

13. El mañana del traspasado mañana es sábado, ¿qué día fue ayer?

A) Domingo B) Lunes C) Martes
D) Jueves E) Miércoles

14. Si hoy fuera pasado mañana, mañana sería sábado. ¿Qué día fue ayer?

A) Domingo B) Jueves C) Sábado
D) Martes E) Viernes

15. Construyendo un árbol genealógico, ¿cuántos bisabuelos tuvieron tus bisabuelos?

A) 40 B) 64 C) 32
D) 128 E) 16

16. La familia Trujillo consta de padre, madre y 8 hijas, además se sabe que cada hija tiene un solo hermano. ¿Cuántas personas hay en dicha familia?

A) 15 B) 13 C) 11 D) 18 E) 12

17. En un almuerzo familiar están presentes tres padres, tres hijos y dos nietos. ¿Cuántas personas como mínimo están compartiendo el almuerzo?

A) 4 B) 8 C) 7 D) 10 E) 6

18. Una familia está integrada por: un abuelo, dos papás, dos mamás, una abuela, un hermano, dos hermanas, dos hijos varones, tres hijas, un suegro, una suegra, una nuera y un yerno. ¿Cuál es el menor número de personas que integran dicha familia?



A) 12 B) 8 C) 10 D) 13 E) 7

NIVEL 3

19. ¿A qué día equivale el mañana del ayer del pasado mañana del mañana del anteayer del mañana del hoy?

A) Mañana B) Hoy C) Ayer
D) Anteayer E) Pasado mañana

20. El ayer del anteayer de mañana fue jueves. ¿Qué día será el mañana del mañana de pasado mañana?

A) Domingo B) Viernes C) Miércoles
D) Sábado E) Jueves

21. El día que está 3 días después del mañana del anteayer de mañana será domingo. ¿Qué día fue el ayer del pasado mañana de hace 4 días?

A) Domingo B) Martes C) Miércoles
D) Sábado E) Lunes

22. Si hoy es el mañana del subsiguiente día del anteayer del lunes, ¿qué día será el día que antecede al posterior día del pasado mañana del anteayer del día que precede al siguiente día de hoy?

A) Lunes B) Martes C) Miércoles
D) Jueves E) Viernes

23. El tío del hijo del padre de Germán es mi primo hermano. Si Germán es hijo único, ¿qué parentesco tengo con el padre del tío de Germán?

A) Sobrino-tío B) Primo C) Hermano
D) Cuñado E) Sobrino

24. Julio es sobrino de Aurora. Si Aurora no tiene hermana y su único hermano ha desposado a Elena, ¿cuál es el parentesco entre Julio y Elena?

A) Primos B) Es tía política C) Hermanos
D) Esposos E) Cuñados

25. Si la mamá de Edith es la hermana de la hermana de mi hermano gemelo, ¿qué es respecto a mí el abuelo de la hermana de Edith?



A) Mi padre
B) Mi abuelo
C) Mi primo
D) Mi hermano
E) Mi tío

26. Si Juan es hijo único de Pedro, ¿qué parentesco tiene Juan con el esposo de la madre del bisnieto de Pedro?

A) Suegro-yerno B) Padre-hijo
C) Tío-abuelo D) A o B
E) Primos

Claves

NIVEL 1
1. C
2. D
3. D
4. B
5. E
6. E
7. C
8. B
9. D

NIVEL 2
10. A
11. E
12. C
13. B
14. D
15. B
16. C
17. A
18. E

NIVEL 3
19. E
20. C
21. E
22. B
23. A
24. B
25. A
26. D

UNIDAD 4



¿Saben matemáticas las abejas?

Pappus de Alejandría dijo: "Las abejas..., en virtud de una cierta intuición geométrica..., saben que el hexágono es más grande que el cuadrado y el triángulo, y que podrá contener más miel con el mismo gasto de material."

Este hecho ya fue constatado por Pappus de Alejandría, matemático griego que vivió del año 290 al 350. Su afirmación se basaba en la forma hexagonal que imprimen a sus celdillas las abejas para guardar la miel. Las abejas, cuando guardan la miel, tienen que resolver varios problemas. Necesitan guardar la miel en celdillas individuales, de tal manera que formen un mosaico sin huecos ni salientes entre las celdillas, ya que hay que aprovechar el espacio al máximo. Solo podrían hacerlo con triángulos, cuadrados y hexágonos. ¿Por qué eligieron entonces los hexágonos, si son más difíciles de construir?.

La respuesta es un problema isoperimétrico (del griego "igual perímetro"). Pappus había demostrado que, entre todos los polígonos regulares con el mismo perímetro, encierran más área aquellos que tengan mayor número de lados. Por eso las abejas construyen sus celdillas de forma hexagonal, ya que, gastando la misma cantidad de cera en las celdillas, consiguen mayor superficie para guardar su miel. La pregunta es: ¿y quién le enseñó esto a las abejas?

Matemática recreativa

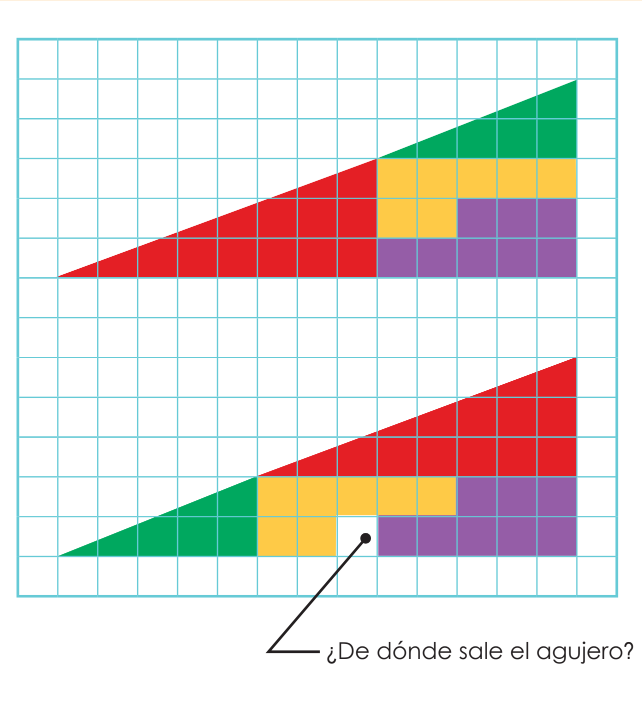
¿Dónde está el cuadrado?

Por todos es sabido que las Matemáticas y la Geometría son ciencias exactas, aunque en ciertas ocasiones nos encontramos con situaciones que ponen en tela de juicio dicha afirmación. Solo hay que observar los gráficos para constatar que algo no es correcto, no está bien: se trata de una paradoja geométrica.

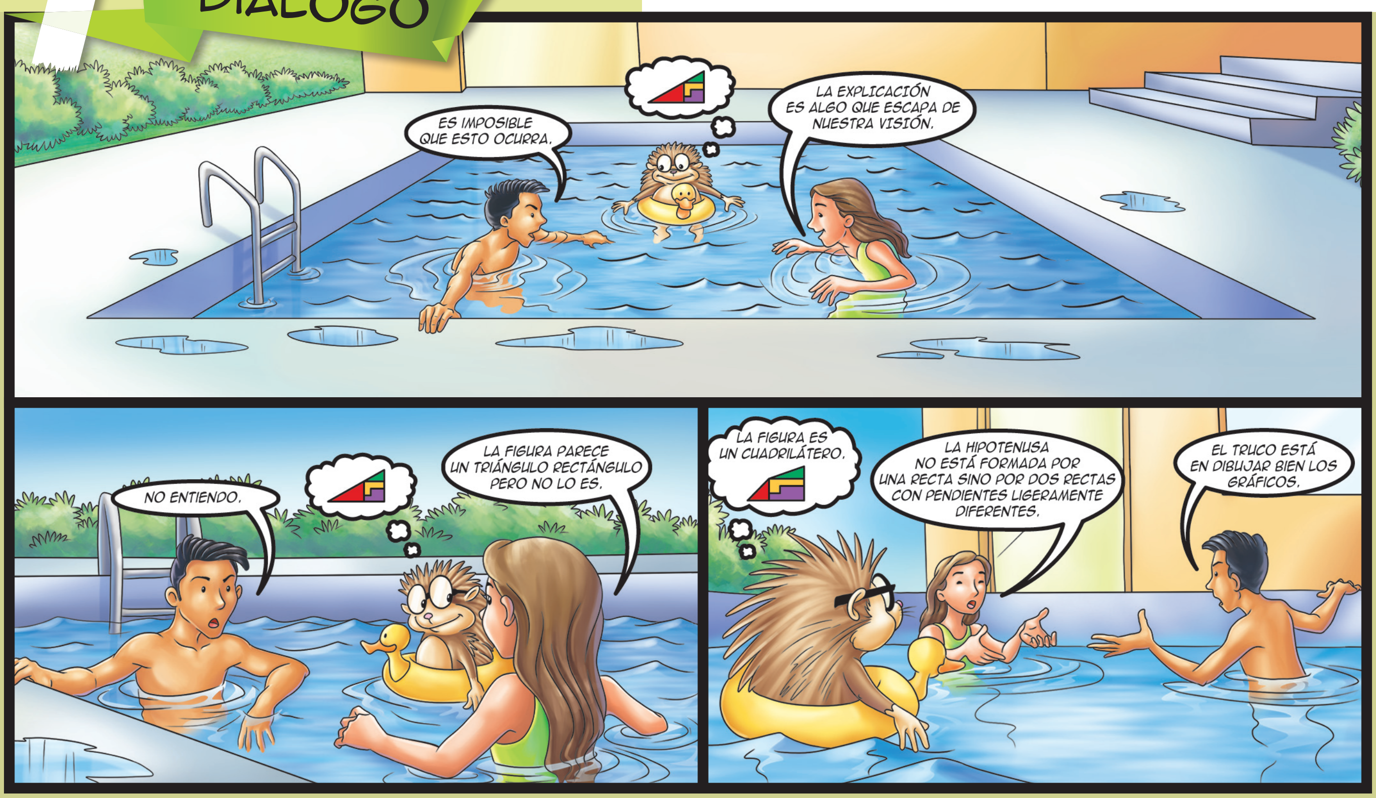
Observamos 2 triángulos con la misma base y altura, conformados por las mismas piezas, pero a uno le falta un cuadrado. ¿Por qué?

En realidad estamos viendo la llamada "Paradoja de Curry" de la que existen muchas variantes con formas y figuras diferentes, y que tiene una explicación matemática aunque escape a nuestra visión corriente.

La solución viene dada por los cálculos de las áreas de las figuras que componen el triángulo y por la trigonometría que las justifica, ya que hace que con el cambio de lugar varíen ángulos, hipotenusas y tangentes. Pero cómo es bastante complicado para quienes no somos matemáticos.



DIÁLOGO

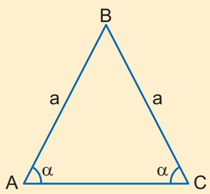


Razonamiento geométrico

TRIÁNGULOS

Immportante

En todo triángulo a lados iguales se oponen angulos iguales y viceversa
Si: AB = BC

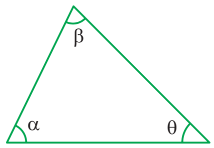


$\Rightarrow m\angle BAC = m\angle BCA$



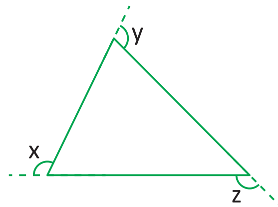
Propiedades básicas

Suma de angulos internos

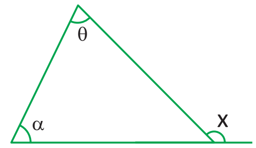


$\alpha + \beta + \theta = 180°$

Suma de angulos externos

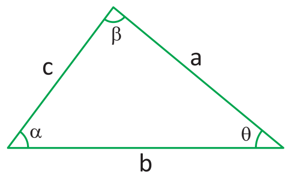


$x + y + z = 360°$



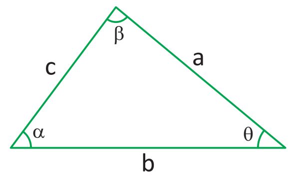
$x = \alpha + \theta$

Propiedad de correspondencia



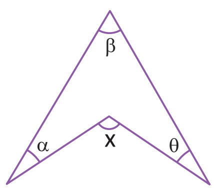
Si: $a > b > c$
Entonces: $\alpha > \beta > \theta$

Propiedad de existencia

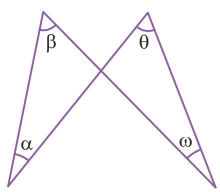


Si: $a > b > c$
$b - c < a < b + c$
$a - c < b < a + c$
$a - b < c < a + b$

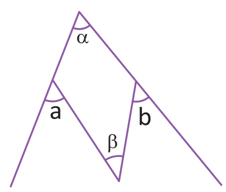
Propiedades adicionales



$x = \alpha + \beta + \theta$

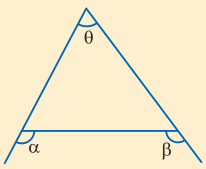


$\alpha + \beta = \theta + \omega$



$a + b = \alpha + \beta$

Atención

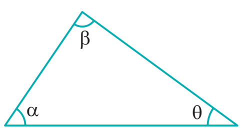


$\alpha + \beta = \theta + 180°$



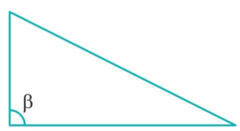
Clasificación según sus ángulos

Acutángulo



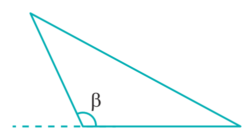
$\alpha < 90°; \beta < 90°; \theta < 90°$

Rectángulo



$\beta = 90°$

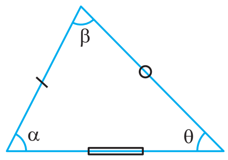
Obtusángulo



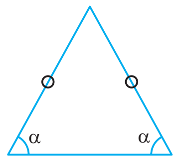
$90° < \beta < 180°$

Clasificación según sus lados

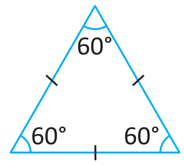
Escaleno



Isósceles

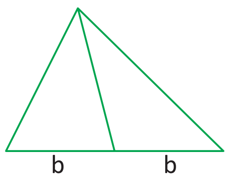


Equilátero

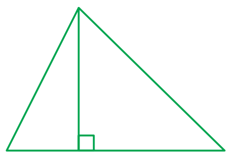


Líneas notables

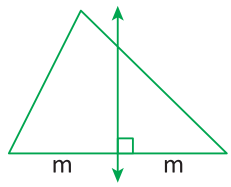
Mediana



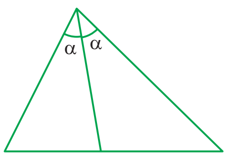
Altura



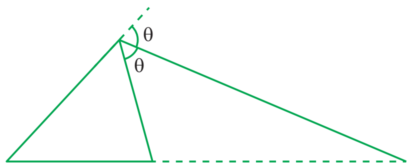
Mediatriz



Bisectriz interior

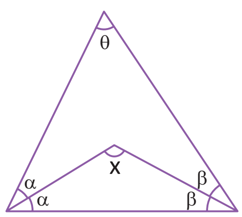


Bisectriz exterior



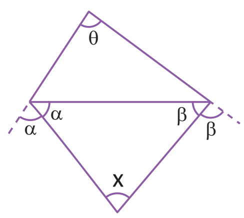
Ángulos formados por bisectrices

Dos bisectrices interiores



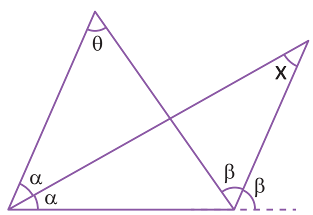
$$x = 90° + \frac{\theta}{2}$$

Dos bisectrices exteriores



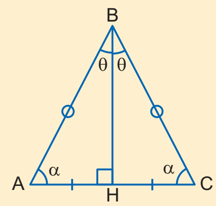
$$x = 90° - \frac{\theta}{2}$$

Una interior y otra exterior



$$x = \frac{\theta}{2}$$

Recuerda



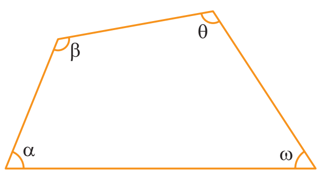
△ABC: isósceles
$\overline{BH}$: altura

AB = BC ⇒ $\overline{BH}$: mediana
bisectriz
mediatriz



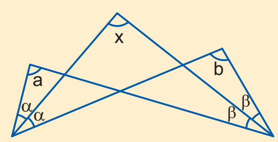
CUADRILÁTEROS

Propiedad básica



$$\alpha + \beta + \theta + \omega = 360°$$

Importante

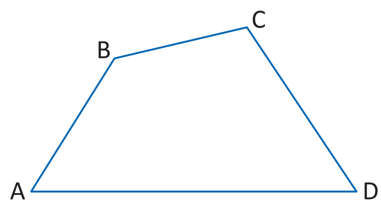


$$x = \frac{a+b}{2}$$



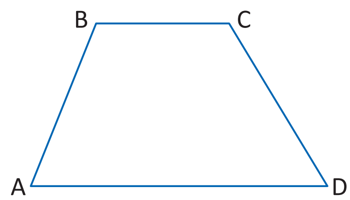
Clasificación

A) trapezoide



Es aquel cuadrilátero cuyos lados opuestos no son paralelos
$\overline{AB}$ no es // a $\overline{CD}$
$\overline{BC}$ no es // a $\overline{AD}$
⇒ ⏢ ABCD: trapezoide

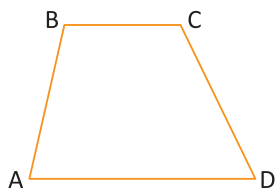
B) Trapecio



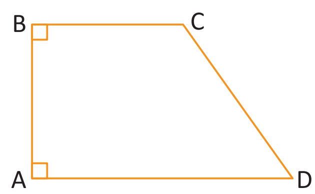
Es aquel cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos a los cuales se les denomina bases.
$\overline{BC}$ // $\overline{AD}$ ⇒ ABCD: trapecio

Tipos de trapecio

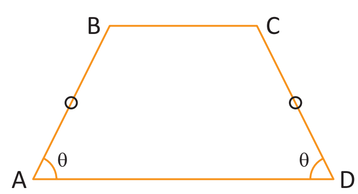
Escaleno



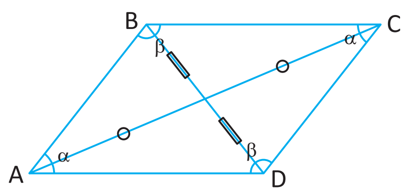
Rectángulo



Isósceles



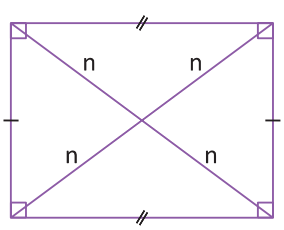
C) Paralelogramo



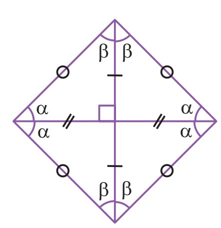
Es aquel cuadrilátero en el cual sus dos pares de lados opuestos son paralelos.
$\overline{AB}$ // $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$
⇒ ABCD; paralelogramo

Tipos de paralelogramo

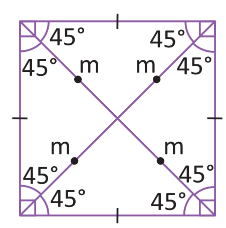
Rectángulo



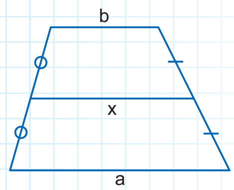
Rombo



Cuadrado

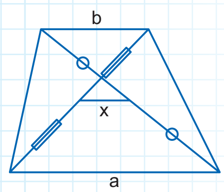


Nota



$x = \frac{a+b}{2}$

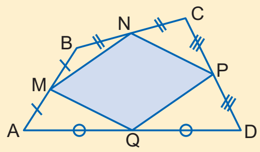
Nota



$x = \frac{a-b}{2}$

Atención

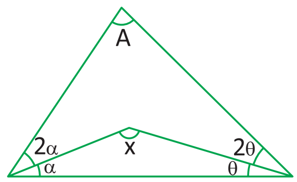
En todo cuadrilátero los puntos medios de sus lados son los vértices de un paralelogramo.





Problemas resueltos

1 Halla x.



Resolución:

Por suma de ángulos interiores:

$3\alpha + 3\theta + A = 180°$

$3\alpha + 3\theta = 180° - A$

$\alpha + \theta = 60° - \frac{A}{3}$ ... (I)

Por propiedad:

$2\alpha + 2\theta + A = x$ ... (II)

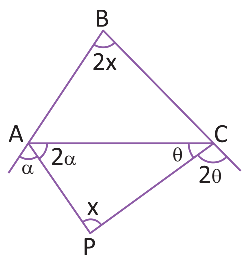
Reemplazando (I) en (II):

$2(\alpha + \theta) + A = x$

$2(60° - \frac{A}{3}) + A = x \Rightarrow 120° - \frac{2A}{3} + A = x$

$\therefore x = 120° + \frac{A}{3}$

2 Si $\alpha + 2\theta = 150°$, halla "x".



Resolución:

$\triangle$ APC: por suma de ángulos internos

$x + 2\alpha + \theta = 180°$ ... (I)

$\triangle$ ABC: por propiedad

$3\alpha + 3\theta = 180° + 2x$ ... (II)

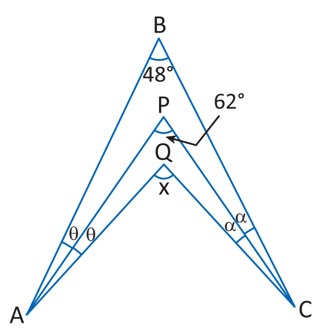
(II) – (I):

$\alpha + 2\theta - x = 2x$

$\alpha + 2\theta = 3x \Rightarrow 150 = 3x$

$\therefore x = 50°$

3 Halla "x".



Resolución:

$\triangle$ABCP: $\theta + \alpha + 48 = 62°$

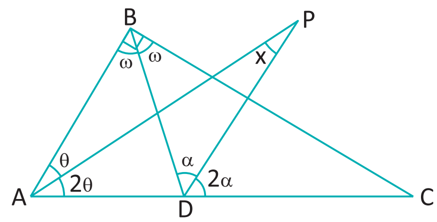
$\theta + \alpha = 14°$

$\triangle$APCQ: $x = \underbrace{\theta + \alpha} + 62°$

$x = 14° + 62°$

$\therefore x = 76°$

4 $\overline{BD}$ es bisectriz, halla "x".



Resolución:

$\overline{BD}$ es bisectriz

$\Rightarrow \omega = 45°$

$\triangle$ABD: por ángulo exterior

$3\theta + \omega = 3\alpha$

$3\theta + 45 = 3\alpha$

$\alpha - \theta = 15°$

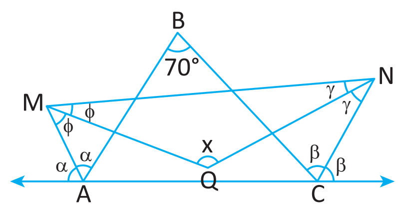
$\triangle$ APD: por ángulo exterior

$2\theta + x = 2\alpha$

$x = 2(\alpha - \theta)$

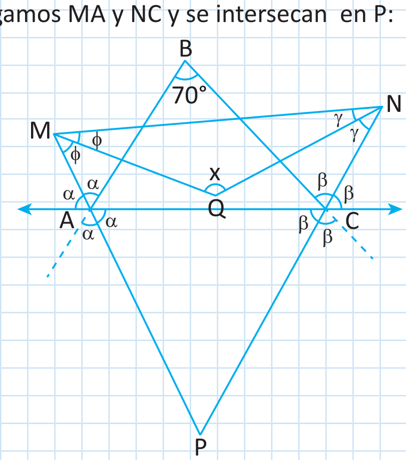
$\therefore x = 30°$

5 Halla x.



Resolución:

Prolongamos $\overline{MA}$ y $\overline{NC}$ y se intersecan en P:



$\triangle$ABC: $\angle$APC ángulo formado por dos bisectrices exteriores.

$$\Rightarrow m\angle APC = 90° - \frac{70°}{2}$$

$$m\angle APC = 55°$$

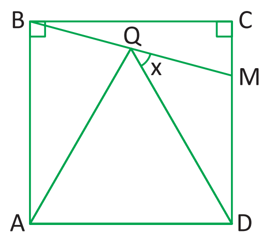
$\triangle$MNP: x ángulo formado por dos bisectrices interiores.

$$\Rightarrow x = 90° + \frac{m\angle APC}{2}$$

$$x = 90° + \frac{55°}{2}$$

$\therefore x = 117,5°$

6 ABCD es un cuadrado y AQD es un triángulo equilátero. Halla "x".



Resolución:

ABCD cuadrado $\Rightarrow$ AB = BC = CD = AD

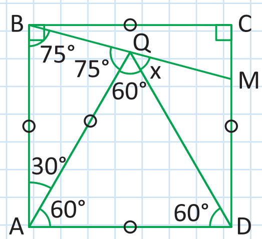
ΔAQD: equilátero

$m\angle QAD = m\angle AQD = m\angle ADQ = 60°$

$\Rightarrow m\angle BAQ = 30°$

ΔBAQ: isósceles

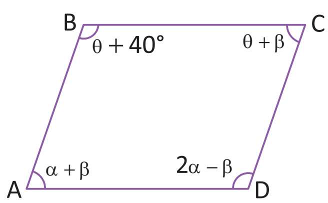
$\Rightarrow m\angle ABQ = m\angle AQB = 75°$



Del gráfico:

$x + 75° + 60° = 180° \Rightarrow x = 45°$

7 ABCD es un paralelogramo, halla: $\alpha + \beta + \theta$



Resolución:

$m\angle BAD + m\angle ADC = 180°$

$\alpha + \beta + 2\alpha - \beta = 180°$

$3\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 60°$

$m\angle ADC + m\angle BCD = 180°$

$2\alpha - \beta + \theta + \beta = 180°$

$120° + \theta = 180° \Rightarrow \theta = 60°$

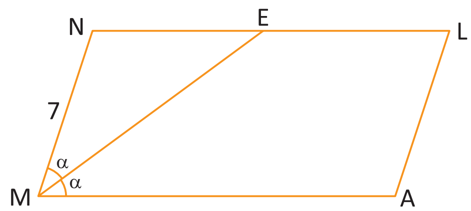
$m\angle ABC + m\angle BCD = 180°$

$\underbrace{\theta + 40° + \theta}_{160°} + \beta = 180°$

$160° + \beta = 180° \Rightarrow \beta = 20°$

Finalmente: $\alpha + \beta + \theta = 60° + 20° + 60° = 140°$

8 En el paralelogramo MNLA, $\overline{ME}$ es la bisectriz de $\angle$NMA. Calcula la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales del trapecio MELA.



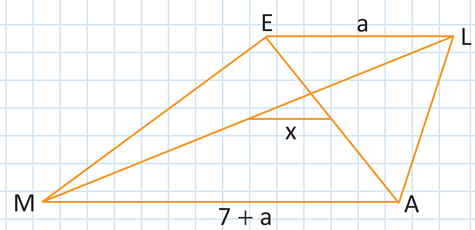
Resolución:

$m\angle EMA = m\angle NEM = \alpha$

ΔMNE: isósceles

MN = NE = 7

Sea EL = a $\Rightarrow$ MA = 7 + a

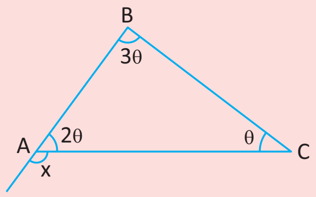


Piden: $x = \dfrac{7 + a - a}{2}$

$x = 3,5$

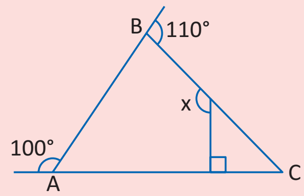
Actividades de razonamiento

1. Calcula el valor de x.



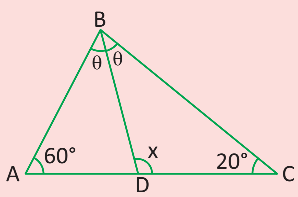
A) 115°   B) 110°   C) 120°
D) 125°   E) 130°

2. De la figura x es igual a:



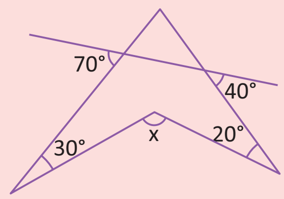
A) 120°   B) 100°   C) 80°
D) 150°   E) 70°

3. En la figura, calcula el valor de x.



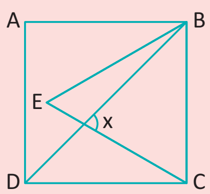
A) 140°   B) 110°   C) 100°
D) 90°   E) 120°

4. Calcula x en la figura:



A) 110°   B) 80°   C) 100°
D) 150°   E) 120°

5. En la figura ABCD es un cuadrado y BCE es un triángulo equilátero, calcula x.

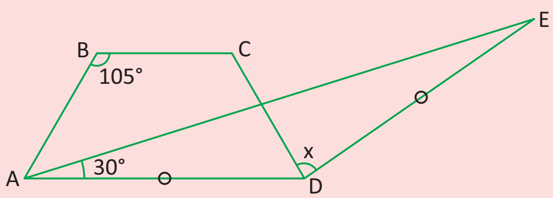


A) 100°   B) 80°   C) 60°
D) 90°   E) 75°

6. En un paralelogramo ABCD, $m\angle A = 3\alpha + 20°$ y $m\angle B = 2\alpha + 30°$. Calcula $m\angle C$.

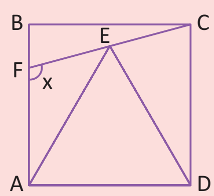
A) 75°   B) 60°   C) 70°
D) 98°   E) 80°

7. Si ABCD es un trapecio isósceles y CDE es un triángulo isósceles. Calcula x.



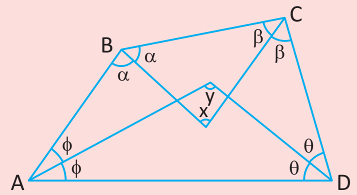
A) 45°   B) 30°   C) 60°
D) 70°   E) 50°

8. Halla el valor de x. ABCD es un cuadrado y AED es un triángulo equilátero:



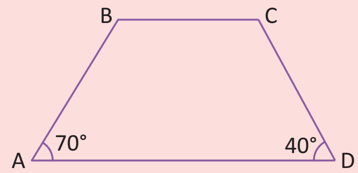
A) 80°   B) 120°   C) 105°
D) 95°   E) 100°

9. Según la figura, calcula: x + y



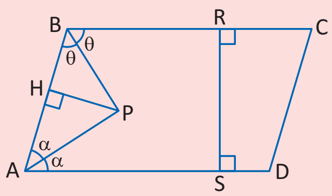
A) 150° B) 180° C) 160°
D) 200° E) 170°

10. En la figura halla AD. Si BC = 4 u y DC = 5 u.



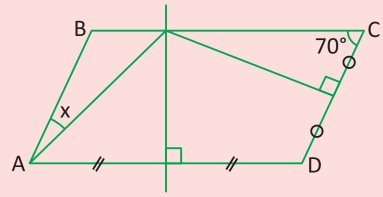
A) 8 u B) 11 u C) 12 u
D) 9 u E) 10 u

11. ABCD: paralelogramo, PH = 6 cm
Calcula RS.



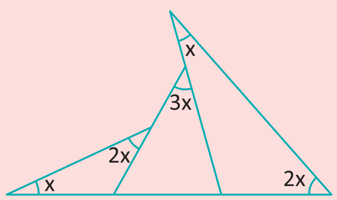
A) 8 cm B) 10 cm C) 12 cm
D) 9 cm E) 13 cm

12. En la figura ABCD es un romboide, calcula x.



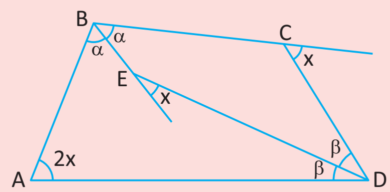
A) 90° B) 30° C) 80°
D) 40° E) 70°

13. Del gráfico, calcula x.



A) 50° B) 20° C) 60°
D) 10° E) 40°

14. De la figura, calcula x.



A) 60° B) 50° C) 37°
D) 36° E) 40°

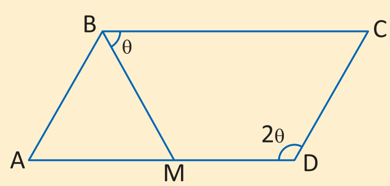
Claves

1. C 2. A 3. B 4. E
5. E 6. D 7. A 8. C
9. B 10. D 11. C 12. B
13. B 14. D

Reto



ABCD es un romboide, calcula AM, si CD = 10 cm.

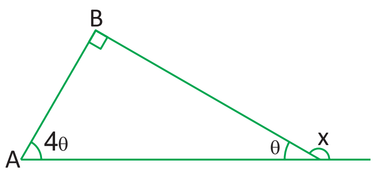


Rpta.: 10 cm

Refuerza practicando

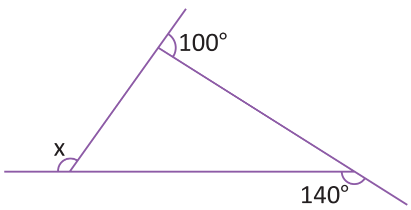
NIVEL 1

1. De la figura, el valor de x es:



A) 155°
B) 120°
C) 162°
D) 170°
E) 135°

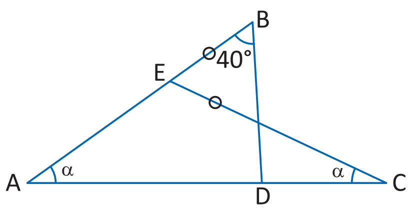
2. Halla x.



A) 100°
B) 160°
C) 140°
D) 120°
E) 150°

3. Calcula la medida del ángulo ADB

UNMSM 2006-I



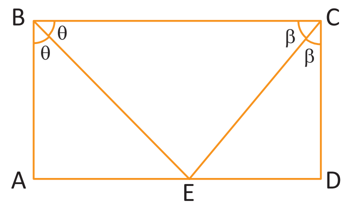
A) 50°
B) 90°
C) 80°
D) 30°
E) 70°

4. En el gráfico, ABCD es un romboide, calcula x.



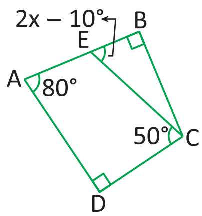
A) 20°
B) 13°
C) 18°
D) 22,5°
E) 15°

5. ABCD es un rectángulo, si AB = 6 cm, calcula BC.



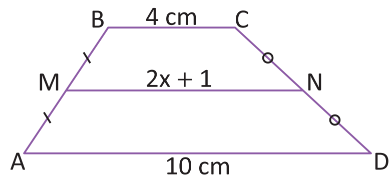
A) 10 cm
B) 12 cm
C) 15 cm
D) 8 cm
E) 14 cm

6. Según el gráfico, calcula x.



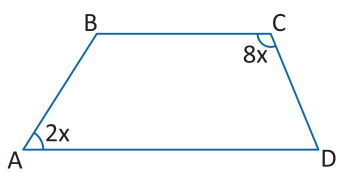
A) 25°
B) 30°
C) 50°
D) 20°
E) 40°

7. Calcula x, si $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$.



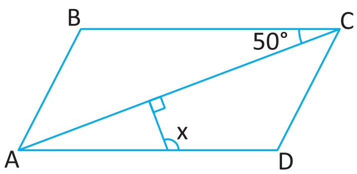
A) 4 cm
B) 7 cm
C) 6 cm
D) 3 cm
E) 5 cm

8. Calcula x, si $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$ y AB = CD.



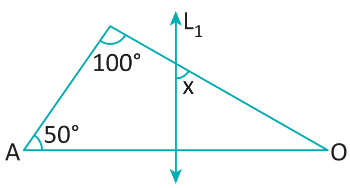
A) 18°
B) 15°
C) 30°
D) 25°
E) 20°

9. Calcula x, si ABCD es un paralelogramo.



A) 170°
B) 120°
C) 130°
D) 100°
E) 140°

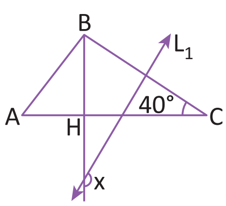
10. Si $\overleftrightarrow{L_1}$ es mediatriz de $\overline{AO}$, calcula x.



A) 53°
B) 40°
C) 60°
D) 37°
E) 50°

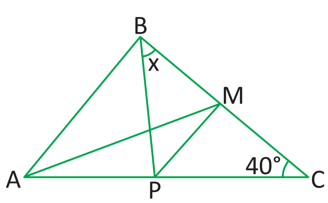
NIVEL 2

11. Del gráfico calcula x, si $\overleftrightarrow{L_1}$ es mediatriz de $\overline{BC}$ y $\overline{BH}$ es altura.



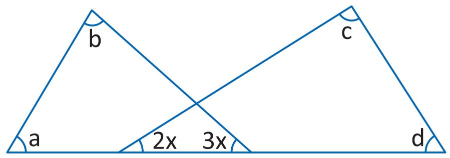
A) 140°
B) 150°
C) 120°
D) 170°
E) 130°

12. Del gráfico calcula x, si se sabe que $\overline{AM}$ es mediana y PM = MC.



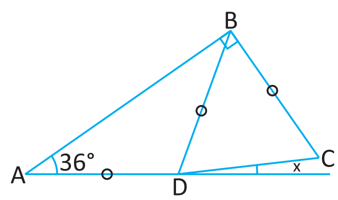
A) 40°
B) 50°
C) 70°
D) 30°
E) 80°

13. Calcula x, si: a + b + c + d = 300°



A) 24° B) 48° C) 16° D) 12° E) 36°

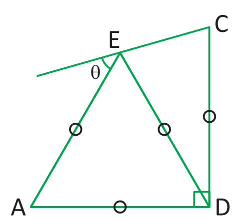
14. De la figura, calcula el valor de x.



A) 18°
B) 20°
C) 15°
D) 12°
E) 9°

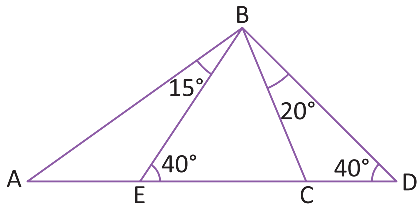
15. Calcula el valor de θ.

UNMSM 2004-I



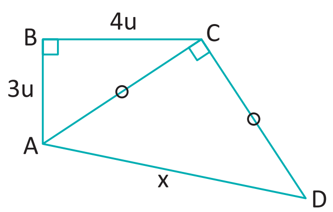
A) 45°
B) 70°
C) 55°
D) 35°
E) 60°

16. ¿De qué tipo es el triángulo ABC?



A) Acutángulo
B) Rectángulo
C) Isósceles
D) Equilátero
E) Obtusángulo

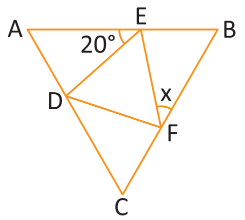
17. Calcula x.



A) $4\sqrt{2}$ u
B) $5\sqrt{2}$ u
C) $6\sqrt{2}$ u
D) $3\sqrt{2}$ u
E) 7 u

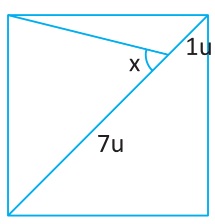
18. En la figura, los triángulos ABC y DEF son equiláteros, calcula el valor de x.

UNMSM 2002



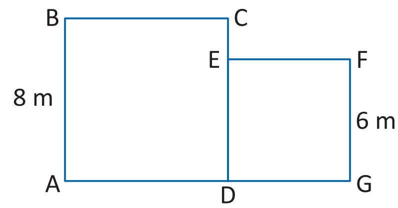
A) 20°
B) 60°
C) 50°
D) 30°
E) 40°

19. Si ABCD es un cuadrado, calcula x.



A) 60°
B) 45°
C) 53°
D) 30°
E) 37°

20. Halla la distancia entre los centros de los cuadrados ABCD y DEFG.



A) $8\sqrt{2}$ m
B) $4\sqrt{2}$ m
C) $5\sqrt{2}$ m
D) $6\sqrt{2}$ m
E) $3\sqrt{2}$ m

NIVEL 3

21. Si el ángulo agudo de un trapecio, isósceles mide 30°, su base menor mide 4 cm y el lado no paralelo mide $2\sqrt{3}$ cm. La medida de la diagonal es:

UNMSM 2004-I

A) $6\sqrt{13}$ cm B) $\sqrt{13}$ cm C) $2\sqrt{13}$ cm
D) $10\sqrt{13}$ cm E) $\sqrt{59}$ cm

22. En un triángulo ABC, se sabe que el ángulo externo de A es el triple del ángulo interno C; la mediatriz del lado AC corta al lado BC en P. Calcula BP, si AB = 9 y BC = 13.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

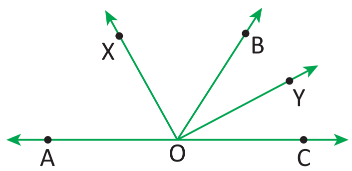
23. En un triángulo ABC (recto en B), se traza la altura BH y luego la bisectriz BQ del ángulo HBC. Si AB = 8 y QC = 5, halla AC.

A) 10 B) 13 C) 16
D) 12 E) 15

24. En un triángulo ABC (recto en B), se traza la altura BH. Halla la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos BAC y HBC.

A) 70° B) 80° C) 60°
D) 90° E) 100°

25. En la figura, $m\angle AOB = 120°$, $\overrightarrow{OX}$ es bisectriz del $\angle AOB$ y $\overrightarrow{OY}$ es bisectriz del $\angle BOC$. Halla la $m\angle XOY$.

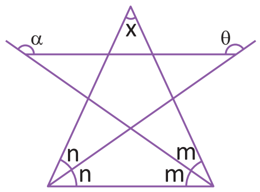


A) 60°
B) 90°
C) 100°
D) 120°
E) 80°

26. Se tienen los ángulos consecutivos AOB y BOC, se traza $\overrightarrow{OD}$ bisectriz del $\angle AOB$ y $\overrightarrow{OE}$ bisectriz del $\angle BOC$. Halla $m\angle DOE$; si: $m\angle AOE + m\angle DOC = 120°$

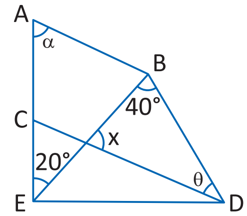
A) 40° B) 30° C) 60°
D) 50° E) 10°

27. Calcula x, si $\alpha + \theta = 280°$.



A) 20°
B) 30°
C) 35°
D) 25°
E) 15°

28. En la figura $\overline{AB} // \overline{CD}$. Calcula x si: $\alpha + \theta = 100°$.



A) 80°
B) 90°
C) 100°
D) 110°
E) 120°

29. Dado un trapecio rectángulo ABCD, se tiene que ($m\angle ABC = m\angle BAD = 90°$), en $\overline{CD}$ se ubica el punto medio N, tal que $m\angle ADC = 2m\angle CBN$, BC = 5 cm y AD = 11 cm. Halla la altura de dicho trapecio.

A) 7 cm B) 8 cm C) 9 cm
D) 10 cm E) 6 cm

30. Calcula la longitud de la altura de un trapecio isósceles si la suma de las longitudes de las bases es m; además las diagonales forman un ángulo de 120°.

A) $m\sqrt{3}$ B) $\frac{m\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{m\sqrt{3}}{6}$
D) $\frac{m\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{m\sqrt{3}}{2}$

Claves

NIVEL 1
1. C
2. D
3. B
4. C
5. B
6. A
7. D
8. A
9. E
10. C

NIVEL 2
11. A
12. B
13. D
14. E
15. A
16. E
17. B
18. A
19. C
20. C

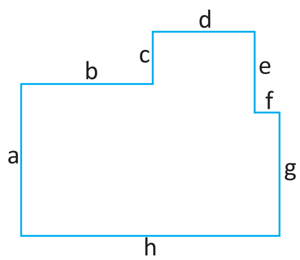
NIVEL 3
21. C
22. C
23. B
24. D
25. B
26. A
27. A
28. C
29. B
30. C

Perímetros y áreas

PERÍMETROS

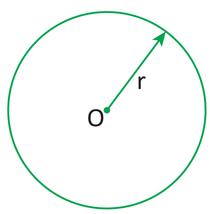
Es el contorno o frontera de una figura.

Perímetro de un polígono



$$2p = a + b + c + d + e + f + g + h$$

Longitud de una circunferencia



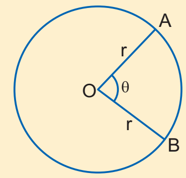
$$L_C = 2\pi r$$

Nota

2p: perímetro
p: semiperímetro



Atención

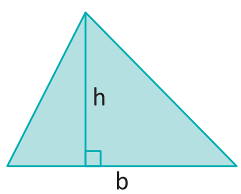


$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{2\pi . r . \theta}{360^\circ}$$

ÁREAS

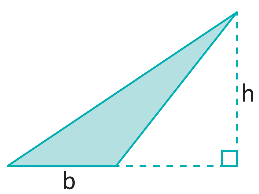
Áreas de regiones triangulares

Triángulo acutángulo



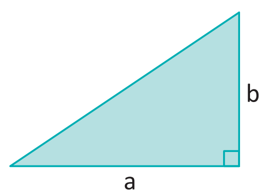
$$A = \frac{b.h}{2}$$

Triángulo obtusángulo



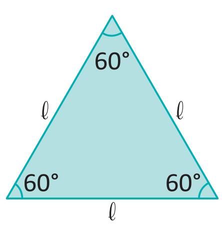
$$A = \frac{b.h}{2}$$

Triángulo rectángulo



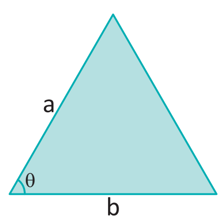
$$A = \frac{a.b}{2}$$

Triángulo equilátero



$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

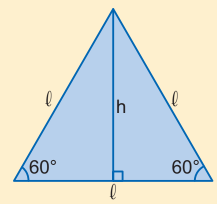
Conociendo dos lados y el ángulo comprendido



$$A = \frac{a.b}{2}\text{sen}\theta$$

Importante

Conociendo la altura de un triángulo equilátero, podemos hallar su área, veamos:

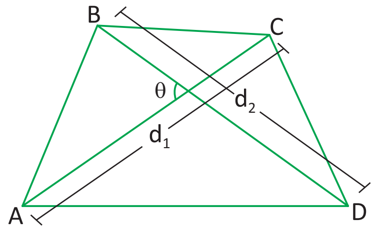


$$A = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$$



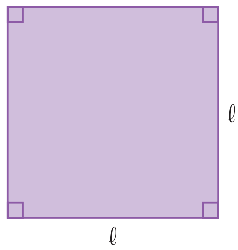
Áreas de regiones cuadrangulares

Fórmula general



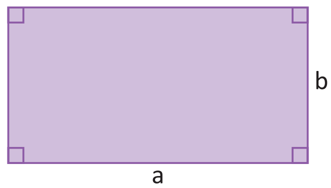
$$A_{\square ABCD} = \frac{d_1 \times d_2}{2}\,\text{sen}\theta$$

Cuadrado



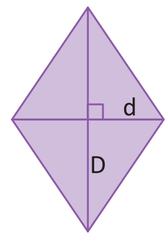
$$A = \ell^2$$

Rectángulo



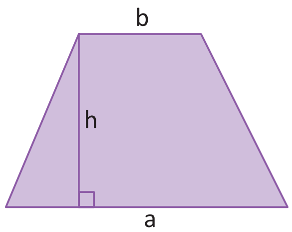
$$A = ab$$

Rombo



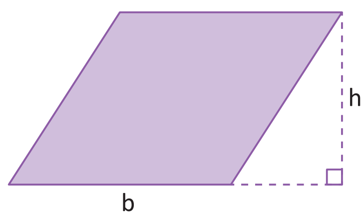
$$A = \frac{Dd}{2}$$

Trapecio



$$A = \left(\frac{a+b}{2}\right)h$$

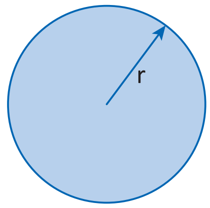
Romboide



$$A = b\,h$$

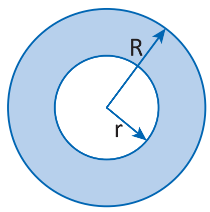
Áreas de regiones circulares

Círculo



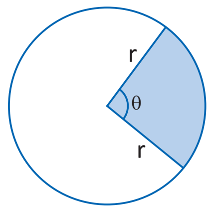
$$A = \pi r^2$$

Corona circular



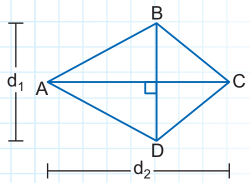
$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

Sector circular



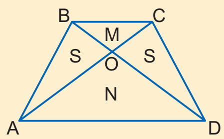
$$A = \frac{\pi . r^2 . \theta}{360°}$$

Nota



$$A_{\square ABCD} = \frac{d_1 . d_2}{2}$$

Importante



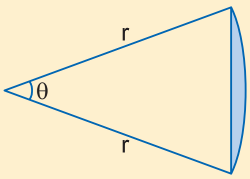
$A_{\square ABCD}$: trapecio

Se cumple: $A_{\Delta AOB} = A_{\Delta COD}$

Además: $S^2 = M . N$



Observación

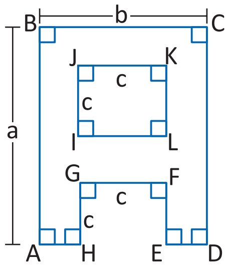


$$A = \frac{\pi . r^2 . \theta}{360} - \frac{r^2 \text{sen}\theta}{2}$$



Problemas resueltos

1 Calcula el perímetro de la siguiente figura sombreada.



Resolución:

Del gráfico:

2p=AB+BC+CD+DE+EF+FG+GH+AH+IJ+JK+KL+IL

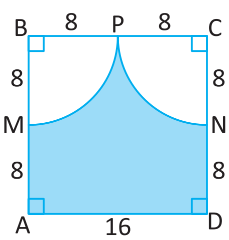
2p=AB+CD+BC+AH+FG+DE+GH+EF+JI+JK+KL+IL

$\quad$ a + a $\quad$ b $\quad$ b + c + c + c + c + c + c

$2p = 2a + 2b + 6c$

$\therefore 2p = 2(a + b + 3c)$

2 Halla el perímetro de la figura sombreada (B y C son centros de las circunferencias).



Resolución:

Según el gráfico:

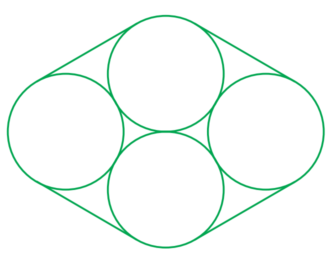
$$2p = MA + AD + ND + L_{\frown MP} + L_{\frown PN}$$

$$= 8 + 16 + 8 + \frac{2\pi 8}{4} + \frac{2\pi 8}{4}$$

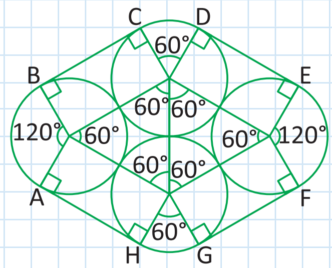
$$= 32 + 8\pi$$

$\therefore 2p = 8(\pi + 4)$

3 Halla la longitud de la cadena que sirve para atar las 4 ruedas de la figura (r = 100 cm).



Resolución:



Del gráfico:

$$L_{cadena} = L_{\frown AB} + L_{\frown CD} + L_{\frown EF} + L_{\frown HG} + BC + DE + GF + AH$$

$$= \frac{2\pi.100}{3} + \frac{2\pi.100}{6} + \frac{2\pi.100}{3} + \frac{2\pi.100}{6} + 200$$

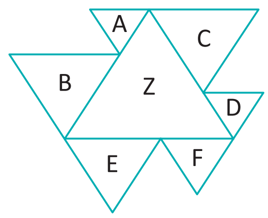
$$+ 200 + 200 + 200$$

$$= \frac{200\pi}{3} + \frac{100\pi}{3} + \frac{200\pi}{3} + \frac{100\pi}{3} + 800 = 200\pi + 800$$

$\therefore L_{cadena} = 200(\pi + 4)$ cm

4 Si los triángulos de la figura son equiláteros, halla M:

$$M = \frac{2P_A + 2P_B + 2P_C + 2P_D + 2P_E}{2P_Z}$$



Resolución:

Sean: a; b; m; n; r y s los lados de los triángulos A; B; C; D; E y F

Luego el lado del triángulo Z será:

$a + b = m + n = r + s$

Ahora: $2P_A = 3a; 2P_B = 3b; 2P_C = 3m$

$2P_D = 3n; 2P_E = 3r, 2P_F = 3s$

$2P_Z = 3(a + b)$

Reemplazando en M:

$$M = \frac{3a + 3b + 3m + 3n + 3r + 3s}{3(a + b)}$$

$$M = \frac{3(a + b) + 3(m + n) + 3(r + s)}{3(a + b)}$$

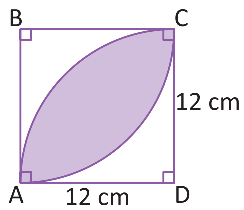
Pero $m + n = r + s = a + b$

$$M = \frac{3(a + b) + 3(a + b) + 3(a + b)}{3(a + b)}$$

$\therefore M = 3$

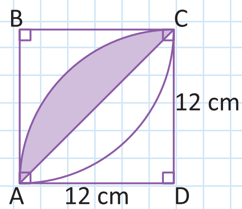
5 Halla el área de la región sombreada.

(ABCD es un cuadrado, y B y D son centros de $\overset{\frown}{AC}$)



Resolución:

Trazamos la diagonal AC para hallar el área por diferencias:



Luego:

$A_{sombreada} = 2[A_{\text{◿}ADC} - A_{\triangle ADC}]$

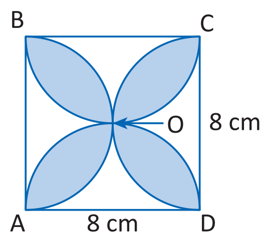
$= 2\left[\frac{\pi.12^2}{4} - \frac{12.12}{2}\right]$

$= 2(36\pi - 72)$

$= 72\pi - 144$

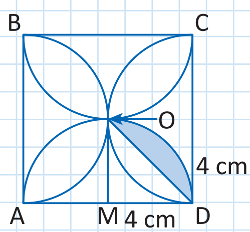
$= 72(\pi - 2)\ cm^2$

6 Halla el área de la región sombreada (ABCD es un cuadrado y "O" centro del cuadrado).



Resolución:

Trazamos la diagonal OD y procedemos de manera análoga al problema anterior para hallar el área:



Luego:

$A_{sombreada} = 8[A_{\text{◺}OMD} - A_{\triangle OMD}]$

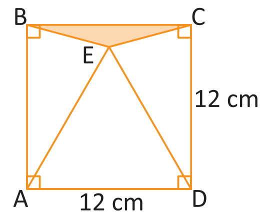
$= 8\left[\frac{\pi.4^2}{4} - \frac{4.4}{2}\right]$

$= 8(4\pi - 8)$

$= 32\pi - 64$

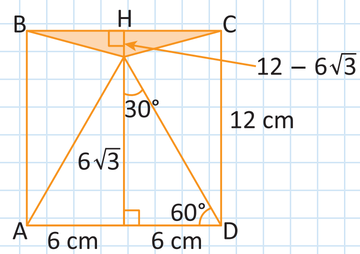
$= 32(\pi - 2)\ cm^2$

7 Halla el área de la región sombreada (ABCD es un cuadrado y AED es un triángulo equilátero).



Resolución:

Trazamos la altura EH ($H \in \overline{BC}$); la cual será igual a la diferencia entre el lado del cuadrado y la altura del triángulo equilátero.



Luego:

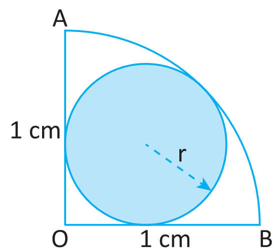
$A_{sombreada} = \frac{12(12 - 6\sqrt{3})}{2}$

$= 6(12 - 6\sqrt{3})$

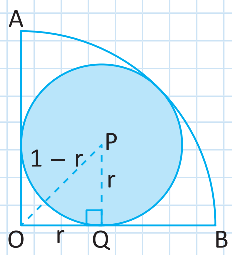
$= 72 - 36\sqrt{3}$

$= 36(2 - \sqrt{3})\ cm^2$

8 Halla el área de la región sombreada.



Resolución:



En el ⊿OQP, por Pitágoras:

$$r^2 + r^2 = (1 - r)^2$$

$$2r^2 = 1 - 2r + r^2$$

$$r^2 + 2r = 1$$

$$r^2 + 2r + 1 = 2$$

$$(r + 1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2} - 1$$

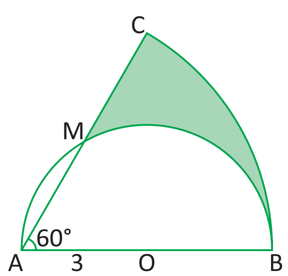
Finalmente:

$$A_{sombreada} = \pi\left(\sqrt{2} - 1\right)^2$$

$$= \pi\left(2 - 2\sqrt{2} + 1\right)$$

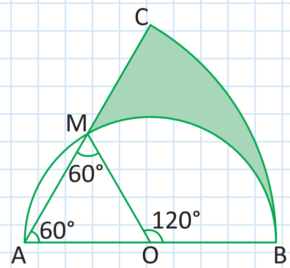
$$= \left(3 - 2\sqrt{2}\right)\pi \text{ cm}^2$$

9 Calcula el área de la región sombreada.



Resolución:

Trazamos $\overline{MO}$, entonces se forma un triángulo equilátero y un sector circular cuyo ángulo es 120°.



Del gráfico:

$$A_{sombreada} = A_{\triangleleft CAB} - (A_{\Delta AMO} + A_{\triangleleft MOB})$$

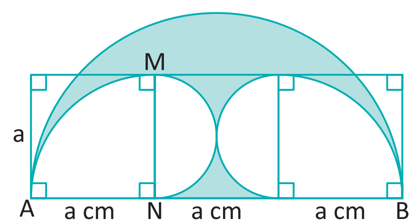
$$= \frac{\pi.6^2 60}{360} - \left(\frac{3^2.\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi.3^2.120}{360}\right)$$

$$= 6\pi - \frac{9}{4}\sqrt{3} - 3\pi$$

$$= \left(3\pi - \frac{9}{4}\sqrt{3}\right)$$

$$= 3(\pi - \frac{3}{4}\sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

10 Halla el área de la región sombreada.



Resolución:

Del gráfico:

$$A_{sombreada} = A_{\frown AB} - [2_{\frown MN} + 2_{\triangleleft ANM}]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{2}a\right)^2 - \left[2.\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2.\pi\frac{a^2}{4}\right]$$

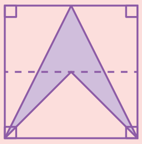
$$= \frac{\pi}{2}.\frac{9}{4}a^2 - \left[\pi\frac{a^2}{4} + \frac{2\pi a^2}{4}\right]$$

$$= \frac{9}{8}a^2\pi - \frac{3}{4}a^2\pi$$

$$= \frac{3}{8}a^2\pi \text{ cm}^2$$

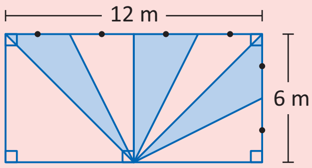
Actividades de razonamiento

1. Halla el área de la región sombreada.



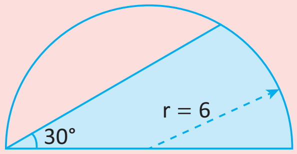
A) $\frac{a^2}{6}$ B) $\frac{a^2}{3}$ C) $\frac{a^2}{5}$
D) $\frac{a^2}{2}$ E) $\frac{a^2}{4}$

2. Halla el área de la región sombreada.



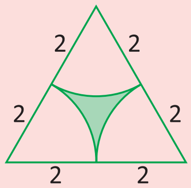
A) 9 m^2 B) 18 m^2 C) 27 m^2
D) 36 m^2 E) 45 m^2

3. Halla el área de la región sombreada.



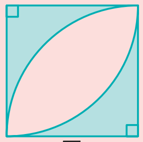
A) $6\pi + \sqrt{3}$ B) $6\pi + 9\sqrt{3}$ C) $9\pi + 6\sqrt{3}$
D) 8π E) $6\sqrt{3}$

4. Halla el área de la región sombreada.



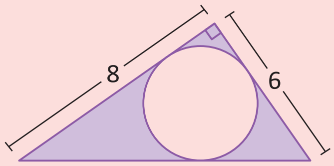
A) $3\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3} + 2\pi$ C) $4\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{3} - 2\pi$ E) 6

5. Halla el área de la región no sombreada.



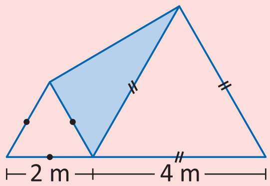
A) $2(\pi - 1)$ B) $2(\pi - 2)$ C) $2(\pi + 1)$
D) $3(\pi - 1)$ E) $(\pi - 2)$

6. Halla el área de la región sombreada.



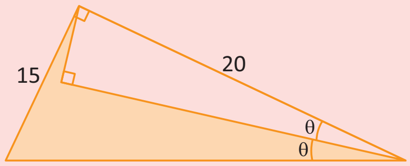
A) $4(6 - \pi)$ B) $4(\pi - 2)$ C) $6(\pi - 1)$
D) $4(8 - \pi)$ E) $4(5 - \pi)$

7. Calcula el área de la región sombreada.



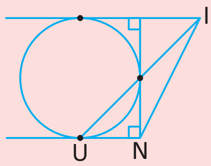
A) $2\sqrt{3}$ m^2 B) 4 m^2 C) $6\sqrt{2}$ m^2
D) $4\sqrt{3}$ m^2 E) 6 m^2

8. Calcula el área de la región sombreada.



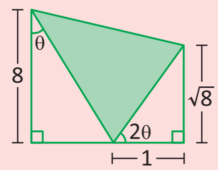
A) 92 B) 100 C) 80
D) 90 E) 93

9. Calcula la razón entre el área del círculo y el área de la región triangular UNI.



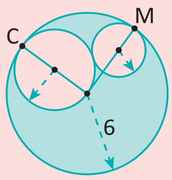
A) 2 B) π C) 3
D) $\pi/2$ E) 2π

10. Halla el área de la región sombreada.



A) 14 B) 13 C) 12
D) 10 E) 8

11. Calcula el área de la región sombreada si $m\overset{\frown}{CM} = 90°$. Además, C, M y P son puntos de tangencia.

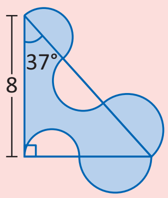


A) $23{,}5\pi$ B) 22π C) 23π
D) 20π E) 24π

12. En un triángulo rectángulo la suma de las longitudes de los catetos es 77 y la hipotenusa mide 55. Calcula el área de la región de dicho triángulo.

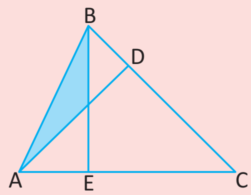
A) 725 B) 726 C) 720
D) 728 E) 730

13. Halla el perímetro de la región sombreada, si son semicircunferencias las que cruzan los lados.



A) 7π B) 8π C) $8\pi + 1$
D) $8(\pi + 1)$ E) $8(\pi + 8)$

14. Si ABC es un triángulo de 96 cm^2 de área, además $3(BD) = DC$ y $EC = 2(AE)$, calcula el área de la región sombreada.



A) 16 cm^2 B) 12 cm^2 C) 24 cm^2
D) 32 cm^2 E) 20 cm^2

Claves

1. E 2. C 3. B 4. D
5. E 6. A 7. A 8. D
9. B 10. C 11. C 12. B
13. D 14. A

Reto



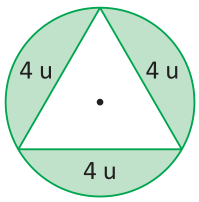
Los lados de un triángulo rectángulo son números enteros que se encuentran en progresión aritmética. Calcula su área si es numéricamente igual a su semiperímetro.

Rpta.: 6 u^2

Refuerza practicando

NIVEL I

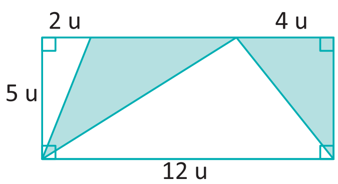
1. Halla el área de la región sombreada.



A) $(p + 4)\ u^2$
B) $2\left(2\sqrt{3} - \pi\right)\ u^2$
C) $\left(\pi - \sqrt{3}\right)\ u^2$
D) $\left(\sqrt{3} + 3\pi\right)\ u^2$
E) $\frac{4}{3}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)\ u^2$

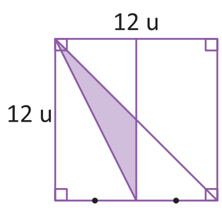
2. En la figura, la relación entre el área de la región sombreada y el área de la región no sombreada es:

UNMSM 1999



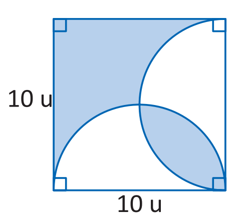
A) 5/8
B) 7/8
C) 5/7
D) 1/2
E) 5/12

3. Halla el área de la región sombreada.



A) $18\ u^2$
B) $10\ u^2$
C) $12\ u^2$
D) $20\ u^2$
E) $15\ u^2$

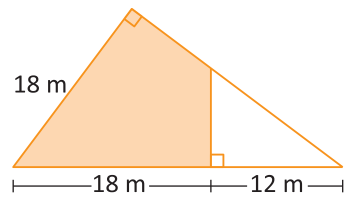
4. Halla, el área de la región sombreada.



A) $30\ u^2$
B) $50\ u^2$
C) $40\ u^2$
D) $45\ u^2$
E) $25\ u^2$

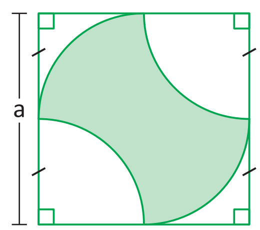
5. En la figura, halla el área de la región sombreada:

UNMSM 2004-II



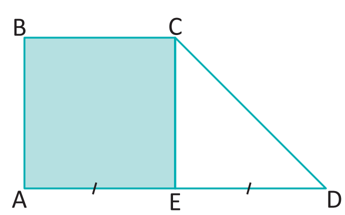
A) $135\ m^2$
B) $118\ m^2$
C) $120\ m^2$
D) $162\ m^2$
E) $145\ m^2$

6. Halla el área de la región sombreada.



A) $\frac{2}{3}a^2\ u^2$
B) $\frac{a^2}{2}\ u^2$
C) $\frac{3}{2}a^2\ u^2$
D) $\frac{3}{4}a^2\ u^2$
E) $\frac{a^2}{4}\ u^2$

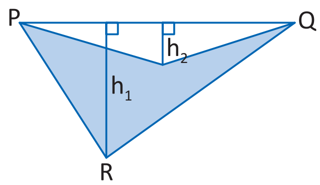
7. Halla el perímetro de la región sombreada si ABCD es un cuadrado y el área de la región trapecial ABCD es $54\ u^2$.



A) 20 u
B) 12 u
C) 24 u
D) 16 u
E) 18 u

8) Si: PQ = 9 m, y la diferencia de las alturas $h_1 - h_2 = 7$ m, el área de la región sombreada, en la figura es:

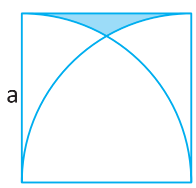
UNMSM 1997



A) 25 m^2
B) 30 m^2
C) 20 m^2
D) 26,5 m^2
E) 31,5 m^2

NIVEL 2

9) Calcula el área de la región sombreada.



A) $\dfrac{a^2(12 - 2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$ u^2

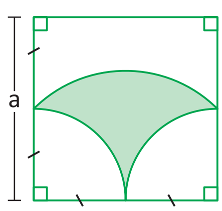
B) $\dfrac{a^2(6 - \pi - \sqrt{3})}{6}$ u^2

C) $\dfrac{a^2(612 - \pi - 2\sqrt{3})}{12}$ u^2

D) $\dfrac{a^2(8 - \pi - 2\sqrt{3})}{4}$ u^2

E) $\dfrac{a^2}{12}$ u^2

10) Halla el área de la región sombreada.



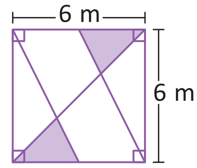
A) $\dfrac{a^2}{4}$ u^2
B) $2a^2$ u^2
C) $3a^2$ u^2
D) $\dfrac{4a^2}{5}$ u^2
E) $\dfrac{2a^2}{5}$ u^2

11) Un rombo de lado 8 cm es tal que uno de sus ángulos internos mide 45°. Halla el área del rombo.

UNMSM 2005-I

A) $10\sqrt{2}$ cm^2
B) $25\sqrt{2}$ cm^2
C) $20\sqrt{2}$ cm^2
D) $32\sqrt{2}$ cm^2
E) $16\sqrt{2}$ cm^2

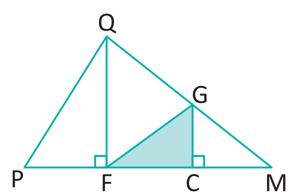
12) Halla el área de la región sombreada.



A) 6 m^2
B) 9 m^2
C) 12 m^2
D) 15 m^2
E) 18 m^2

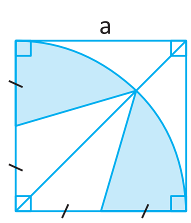
13) En la figura: $\dfrac{FP}{FM} = \dfrac{1}{6}$, $\overline{CG} \,//\, \overline{QF}$, G es el punto medio de $\overline{MQ}$ y el área de la región PQM es 100 m^2. Calcula el área de la región sombreada (en m^2).

UNI 2001-I



A) (300/7) m^2
B) (115/7) m^2
C) 35 m^2
D) (150/7) m^2
E) (118/7) m^2

14) Halla el área de la región sombreada.



A) $\dfrac{a^2(\pi - \sqrt{3})}{4}$

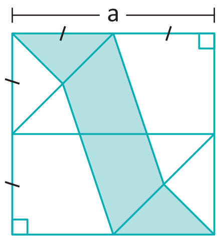
B) $\dfrac{a^2(\pi - \sqrt{2})}{2}$

C) $\dfrac{a^2(\pi - 3)}{3}$

D) $\dfrac{a^2(\pi - \sqrt{2})}{4}$

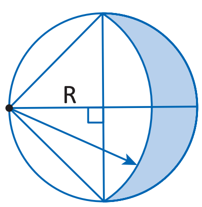
E) $\dfrac{a^2(\pi - 3)}{4}$

15) Halla el área de la región sombreada.



A) $\frac{3a^2}{7}$
B) $\frac{3a^2}{8}$
C) $\frac{a^2}{3}$
D) $\frac{2a^2}{5}$
E) $\frac{3a^2}{5}$

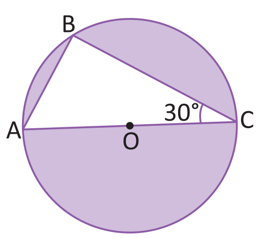
16) Calcula el área de la región sombreada.



A) $3R^2$
B) $2R^2$
C) $4R^2$
D) $6R^2$
E) R^2

17) Calcula el área de la región sombreada de la figura, donde AB = 1 cm.

UNMSM 2005-II

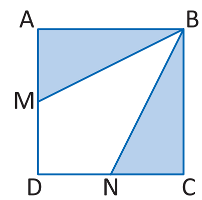


A) $\frac{(2\pi-\sqrt{3})}{2}\text{ cm}^2$
B) $\frac{(4\pi-\sqrt{3})}{2}\text{ cm}^2$
C) $\frac{(\pi-\sqrt{3})}{2}\text{ cm}^2$
D) $\frac{(2\pi+\sqrt{3})}{2}\text{ cm}^2$
E) $\frac{(\pi+\sqrt{3})}{2}\text{ cm}^2$

NIVEL 3

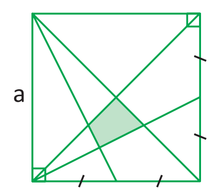
18) Halla el área de la zona sombreada en el cuadrado ABCD, donde M y N son puntos medios de los lados, y MN = 1,5 m

UNMSM 2005-I



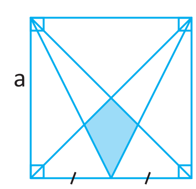
A) 2,56 m^2
B) 2,16 m^2
C) 2,65 m^2
D) 2,50 m^2
E) 2,25 m^2

19) Halla el área de la región sombreada.



A) $\frac{a^2}{10}$ B) $\frac{a^2}{20}$
C) $\frac{a^2}{30}$ D) $\frac{a^2}{15}$
E) $\frac{a^2}{12}$

20) Halla el área de la región sombreada.



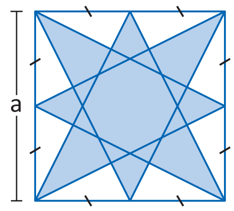
A) $\frac{a^2}{8}$ B) $\frac{a^2}{10}$
C) $\frac{a^2}{12}$ D) $\frac{a^2}{15}$
E) $\frac{a^2}{15}$

21) Sea ABCD un cuadrado de lado L, sobre los lados AB y AD se construyen triángulos equiláteros, ΔAEB y ΔAFD respectivamente. Calcula el área de la región triangular EAF.

UNI 2001-II

A) $L^2/2$ B) $L^2/3$ C) $2L^2/3$
D) $3L^2/4$ E) $L^2/4$

22. Halla el área de la región sombreada.

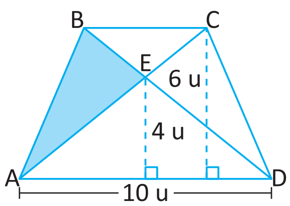


A) $\frac{a^2}{2}$ B) $\frac{2a^2}{5}$

C) $\frac{3a^2}{5}$ D) $\frac{7a^2}{10}$

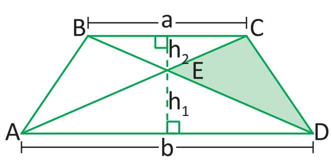
E) $\frac{4a^2}{7}$

23. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un trapecio.



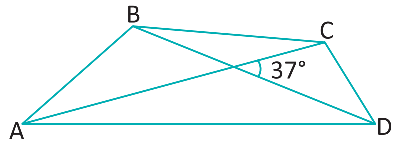
A) 12 u^2
B) 20 u^2
C) 5 u^2
D) 10 u^2
E) 15 u^2

24. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un trapecio además; $a \cdot b = h_1 \cdot h_2 = 12\ u^2$.



A) 12 u^2
B) 10 u^2
C) 6 u^2
D) 15 u^2
E) 8 u^2

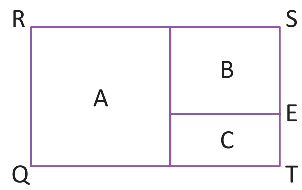
25. Halla el área de la región cuadrangular ABCD, si AC = 10 u; BD = 12 u.



A) 40 u^2
B) 36 u^2
C) 24 u^2
D) 18 u^2
E) 20 u^2

26. En la figura adjunta, A y B son cuadrados y C es rectángulo. Las áreas de A y C son 196 m^2 y 48 m^2 respectivamente (SE > ET). El área de QRST es:

UNMSM 2004-II



A) 325 m^2
B) 255 m^2
C) 280 m^2
D) 308 m^2
E) 300 m^2

Claves

NIVEL 1	8. E	15. B	22. C
1. E	**NIVEL 2**	16. E	23. D
2. C	9. A	17. A	24. C
3. A	10. A	**NIVEL 3**	25. B
4. B	11. D	18. E	26. D
5. D	12. A	19. B	
6. B	13. D	20. C	
7. C	14. D	21. E	

Análisis combinatorio

FACTORIAL DE UN NÚMERO NATURAL

Si n es un número natural, el factorial de n denotado por n! o $\underline{|n}$, se define como 1 (si n $\in$ {0; 1}) o como el producto de todos los números enteros consecutivos desde 1 hasta n (si n > 1).

$$n! = \begin{cases} 1; \text{ si } n \in \{0; 1\} \\ 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n; \text{ si } n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n > 1 \end{cases}$$

Atención

Los factoriales solo están definidos para cantidades enteras y positivas.



Ejemplos:

- $1! = 1$
- $2! = 1 \times 2 = 2$
- $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$
- $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$
- $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
- $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$
- $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$
- $8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40\,320$

Nota

Por convención:

$0! = 1$

Propiedad

$$n! = n(n-1)!$$

Ejemplos:

1. Calcula:

$$A = \frac{21! + 22!}{19! + 20!}$$

Resolución:

$$A = \frac{21 \times 20 \times 19! + 22 \times 21 \times 20 \times 19}{19! + 20 \times 19!}$$

$$A = \frac{19!(21 \times 20 + 22 \times 21 \times 20)}{19!(1 + 20)}$$

$$A = \frac{21(20 + 22 \times 20)}{21}$$

$A = 20(1 + 22)$

$A = 20 \times 23$

$A = 460$

2. Efectúa:

$$B = \frac{11! + 12! + 13!}{10! \times 13^2}$$

Resolución:

$$B = \frac{11 \times 10! + 12 \times 11 \times 10! + 13 \times 12 \times 11 \times 10!}{10! \times 13 \times 13}$$

$$B = \frac{10!(11 + 12 \times 11 + 13 \times 12 \times 11)}{10! \times 13 \times 13}$$

$$B = \frac{11(1 + 12 + 13 \times 12)}{13 \times 13}$$

$$B = \frac{11(13 \times 13)}{13 \times 13}$$

$B = 11$



Observación

Si: $x! = a! \Rightarrow x = a$

Ejemplo:

$(2n + 3)! = 120$

$(2n + 3)! = 5!$

$2n + 3 = 5$

$2n = 2$

$n = 1$

3. Simplifica:

$$P = \frac{(101!)^2 - (100!)^2}{100(100!)^2}$$

Resolución:

$$P = \frac{[(101!) + (100!)][(101!) - (100!)]}{100 \times 100! \times 100!}$$

$$P = \frac{[100!(101 + 1)][100!(101 - 1)]}{100 \times 100! \times 100!}$$

$$P = \frac{102 \times 100}{100}$$

$$P = 102$$

Recuerda

$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$



4. Halla "n", en:

$$\frac{(n+8)!}{(n+6)!} - \frac{(n+7)!}{(n+5)!} = n + 29$$

Resolución:

$$\frac{(n+8)(n+7)(n+6)!}{(n+6)!} - \frac{(n+7)(n+6)(n+5)!}{(n+5)!} = n + 29$$

$$(n + 7)[(n + 8) - (n + 6)] = n + 29$$

$$(n + 7)2 = n + 29$$

$$2n + 14 = n + 29$$

$$n = 15$$

Atención

$(n + m)! \neq n! + m!$

$(n \times m)! \neq n! \times m!$

$\left(\frac{n}{m}\right)! \neq \frac{n!}{m!}$



PRINCIPIO DE ADICIÓN

Si el suceso "A" puede realizarse de "m" maneras y el suceso "B" de "n" maneras, entonces el suceso "A" o el suceso "B" se pueden realizar de "m + n" maneras.

Ejemplo:
Un producto se vende en 3 mercados, en el primero se tiene disponible en 6 tiendas, en el segundo en 5 tiendas y en el tercero en 7 tiendas. ¿De cuántas maneras una persona puede adquirir un artículo de dicho producto?

Resolución:
Como son 3 mercados y tenemos que decidir a cual vamos a ir, entonces:

$$\text{n.° de maneras} = 6 + 5 + 7$$
$$= 18$$

PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Si un evento "A" se puede efectuar de "m" maneras y para cada una de estas, otro evento "B" se puede efectuar de "n" maneras, entonces los eventos "A" y "B" se pueden efectuar simultáneamente (o uno seguido del otro), de "$m \times n$" maneras.

Ejemplo:
¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al lanzar una moneda y un dado simultáneamente?

Resolución:
– Al lanzar una moneda puede salir cara o sello, luego hay 2 posibilidades.
– Al lanzar un dado puede salir: 1; 2; 3; 4; 5 ó 6, hay 6 posibilidades.
– Por lo tanto: n.° de resultados diferentes = $2 \times 6 = 12$

Ten en cuenta

Para las variaciones sí interesa el orden de sus elementos, ya que no es lo mismo decir 45 que 54, como se nota estos dos números están compuestos por las mismas cifras, pero en su valor son diferentes.



VARIACIONES

Es cada una de las ordenaciones que pueden formarse con varios elementos, tomados de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres, etc., de modo que dos ordenaciones cualesquiera del mismo número de elementos se diferencien por lo menos, en un elemento o por el orden en que estén colocados.

Sea $M = \{\underbrace{a; b; c}_{3 \text{ elementos}}\}$

- Si tomamos de 2 en 2 se tiene: {ab; bc; ca; ac; cb; ba} $\Rightarrow V_2^3 = 6$
- Si tomamos de 3 en 3 se tiene: {abc; bca; cab; bac; acb; cba} $\Rightarrow V_3^3 = 6$

Luego:

$$\boxed{V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}} \; ; 0 < n < m$$

Ejemplo:

¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar con los nueve dígitos 1; 2; 3; ...; 9?

Resolución:

Aplicando: $V_n^m = \dfrac{m!}{(m-n)!}$

Donde: $m = 9; n = 4$

Luego: $V_4^9 = \dfrac{9!}{(9-4)!} = \dfrac{9!}{5!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 3024$

$\therefore$ Se pueden formar 3024 números.

Observación

- $C_1^n = n$
- $C_n^n = 1$
- $C_0^n = 1$
- $C_{n-1}^n = n$



COMBINACIONES

Se llama combinación a las variaciones que pueden formarse con varios elementos, de modo que dos de ellos difieran por lo menos en un elemento.

Sea: N = {a; b; c; d}

- Si tomamos de 2 en 2 se tiene: {ab; bc; cd; da; ac; bd} $\Rightarrow C_2^4 = 6$
- Si tomamos de 3 en 3 se tiene: {abc; bcd; cda; dab} $\Rightarrow C_3^4 = 4$

Luego:

$$\boxed{C_n^m = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}} \; ; 0 < n < m$$

Ejemplo:

El Club Deportivo Municipal cuenta con 12 dirigentes y se desea formar una comisión compuesta por 5 miembros. ¿De cuántas maneras distintas se puede formar dicha comisión?

Resolución:

Como de los 12 dirigentes hay que escoger 5 de ellos, no interesa el orden, es decir se trata de una combinación de 12 elementos en grupos de 5.

Luego:

$$C_5^{12} = \frac{12!}{(12-5)!\,5!} = \frac{12!}{7!\,5!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 792$$

$\therefore$ La comisión se puede formar de 792 maneras.

PERMUTACIONES

Se llama permutación a las variaciones en las que entran todos los elementos en sus diferentes ordenaciones, de manera que dos grupos cualesquiera, contienen los mismos elementos y solo difieren en el orden en que están colocados.

Sea: $P = \{a; b; c\}$

Si tomamos todos los elementos {abc; bca; cab; acb; bac; cba} ⇨ $P_3 = 6$

Luego: $P_n = n!$

Ejemplo:

En el cine 6 amigos se ubican en una fila de butacas. ¿De cuántas formas diferentes se podrán sentar?

Resolución:

- Ya que se van a ubicar en una fila y solo varía en el orden en que se ubiquen se trata de una permutación.
- Calculamos la permutación de los 6 elementos: $P^6 = 6! = 720$

Nota

Para las combinaciones no interesa el orden.
Por ejemplo: si disponemos de 6 frutas y se debe preparar un jugo de 3 frutas, no importa el orden en el cual se coloquen las frutas al momento de preparar.

PERMUTACIÓN CIRCULAR

Se llama permutación circular cuando se disponen n elementos alrededor de un círculo, el número de elementos es $(n - 1)!$ si se cuenta siempre en el mismo sentido a partir de un mismo elemento.

$$PC_n = (n-1)!$$

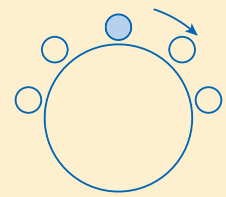
Ejemplo:

En una charla técnica se ubican alrededor de una mesa circular el entrenador y 7 jugadores. ¿De cuántas formas se podrán ubicar alrededor de la mesa?

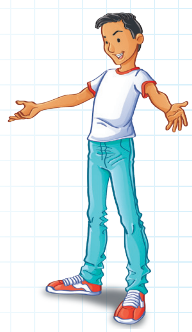
Resolución:

- Como se van a ubicar alrededor de una mesa circular estamos ante una permutación circular.
- Calculamos la permutación circular de 8 elementos: $PC_8 = (8 - 1)! = 7! = 5040$

Observación



Se toma como base un elemento y a partir de él se realiza la permutación.



PERMUTACIÓN CON ELEMENTOS REPETIDOS

Se llama permutación con elementos repetidos cuando de los n elementos que se disponen algunos se repiten.

Donde:

n : n.° total de elementos

n_1: n.° de elementos repetidos de la 1.ª clase

n_2: n.° de elementos repetidos de la 2.ª clase

n_3: n.° de elementos repetidos de la 3.ª clase

⋮ ⋮

n_k: n.° de elementos repetidos de la k-ésima clase.

Además:

$n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k \leq n$

$$P^n_{n_1;n_2;...;n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! ... \times n_k!}$$

Ejemplo:

Un estudiante desea mostrar 6 de sus libros en su biblioteca. Los libros tienen diferentes colores, de manera que 3 son azules, 2 son verdes y 1 es blanco. ¿De cuántas maneras puede exhibir los 6 libros?

Resolución:

Se trata de una permutación de 6 elementos con 3; 2 y 1 elemento repetido.

$$P^6_{3;2;1} = \frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1 \times 1} = 60$$

Problemas resueltos

1 Determina el valor de n si:

$$\frac{(n+5)!(n+3)!}{(n+4)!+(n+3)!} = 25!$$

Resolución:

$$\frac{(n+5)!(n+3)!}{(n+4)(n+3)!+(n+3)!} = 25!$$

$$\frac{(n+5)!}{(n+4)+1} = 25!$$

$$\frac{(n+5)!}{n+5} = 25! \Rightarrow \frac{(n+5)(n+4)!}{(n+5)} = 25!$$

$$(n+4)! = 25!$$

$$\Rightarrow n = 21$$

2 Si $C_{12}^{n} = C_{8}^{n}$, halla C_{17}^{n}.

Resolución:

$$\frac{n!}{(n-12)!.12!} = \frac{n!}{(n-8)!.8!}$$

$$(n-8)!.8! = (n-12)!.12!$$

$$(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)(n-12)!\,8! = (n-12)!\,12.11.10.9.8!$$

$$(n-8)(n-9)(n-10)(n-11) = 12.11.10.9$$

$$n-8 = 12 \Rightarrow n = 20$$

$$\therefore C_{17}^{20} = \frac{20!}{3!.17!} = \frac{20.19.18.17!}{1.2.3.17!} = 1140$$

3 Se debe elegir un presidente y un secretario de un grupo de 5 personas. ¿De cuántas maneras puede hacerse esta elección?

Resolución:

Este caso se trata de una variación, ya que importa el orden.

$$V_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!}$$

$$V_2^5 = \frac{5!}{3!}$$

$$V_2^5 = \frac{5\times4\times3!}{3!} = 20 \text{ maneras.}$$

4 En una reunión se observó 36 apretones de mano. ¿Cuántas personas hay en dicha reunión?

Resolución:

Aplicaremos la definición de una combinación. Sea n el número de personas que se saludan de 2 en 2, luego:

$$C_2^n = 36$$

$$\frac{n!}{(n-2)!\times 2!} = 36$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\times 2} = 36$$

$$n(n-1) = 72$$

$$n = 9$$

Entonces, en la reunión hay 9 personas.

5 ¿Cuántas banderas de 3 colores distintos se pueden hacer usando los colores del arcoíris?

Resolución:

El arcoíris tiene 7 colores y al hacer las banderas el orden de los colores será fundamental, por lo tanto, se trata de una variación de 7 elementos tomados de 3 en 3.

$$V_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{4!.5.6.7}{4!} = 210$$

6 ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 niños en una fila, si Juan debe estar siempre en el centro?

Resolución:

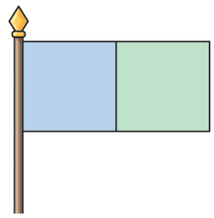
Si Juan debe permanecer en el medio solo moveremos a 4 niños. Tomando en cuenta que un niño solo puede estar en un lugar a la vez, tenemos:

		Juan		
4 niños ×	3 niños		2 niños ×	1 niño

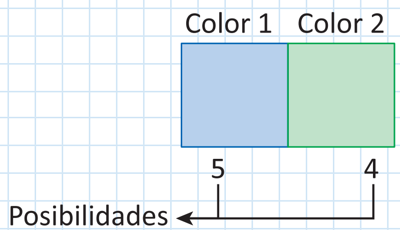
Entonces: $4\times3\times2\times1 = 24$

Los niños se pueden sentar de 24 maneras diferentes con Juan sentado al medio de la fila.

7 Con cinco retazos de tela, ¿cuántas banderas bicolor se pueden confeccionar, dado que los retazos son de colores diferentes y la bandera debe tener la siguiente forma?



Resolución:



Luego, por el principio de la multiplicación tenemos: $5 \times 4 = 20$

Entonces, se pueden confeccionar 20 banderas bicolor.

8 Una señora tiene 11 amigas de confianza. ¿De cuántas maneras puede invitar a 5 de ellas para cenar?

Resolución:

Como no importa el orden se trata de una combinación.

$$C_5^{11} = \frac{11!}{(11-5)!5!}$$

$$C_5^{11} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$$

$$C_5^{11} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{2 \times 3 \times 4 \times 5} = 462$$

Puede invitarlas de 462 maneras diferentes.

9 A la copa confederaciones clasificaron 8 equipos. Si ahora juegan todos contra todos, ¿cuántos partidos se llevan a cabo?

Resolución:

Como juegan todos contra todos, el orden no importa para la formación de los partidos, además, en un partido solo participan 2 equipos, luego, estamos ante una combinación.
Calculando el número de combinaciones de 8 elementos tomados de 2 en 2:

$$C_2^8 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2 \times 6!} = 28$$

10 ¿De cuántas maneras se podrán dibujar en una pizarra, uno a continuación del otro, 8 cuadrados y 5 triángulos?

Resolución:

Se trata de una permutación con elementos repetidos.
Calculamos el número permutaciones de 13 elementos con 8 y 5 elementos repetidos:

$$V_{8;5}^{13} = \frac{13!}{8!5!} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1287$$

11 En una urna hay 7 fichas con nombres de mujeres y 5 fichas con nombres de varones. Si sacamos 4 nombres, uno a uno, y en cada extracción volvemos a hacer participar al nombre extraído, ¿de cuántas maneras podemos obtener 3 nombres de mujeres de los 4 extraídos?

Resolución:

Consideremos el caso en que la primera ficha contiene el nombre de un varón:

$$\underset{1.^a\ \text{extracción}}{\overset{\text{varones}}{5}} \times \underset{2.^a\ \text{extracción}}{\overset{\text{mujeres}}{7}} \times \underset{3.^a\ \text{extracción}}{\overset{\text{mujeres}}{7}} \times \underset{4.^a\ \text{extracción}}{\overset{\text{mujeres}}{7}}$$

Se observa que en la 2.ª, 3.ª y 4.ª extracción participan el mismo número de mujeres.
Considerando el orden en que las fichas son extraídas se tienen los siguientes casos:

VMMM; MVMM; MMVM; MMMV
Permutaciones con repetición

Luego; el número de maneras en que se puede obtener 3 nombres de mujeres en 4 fichas extraídas es:

$$V_{1;3}^{4} \times 5 \times 7^3 = \frac{4!}{1! \times 3!} \times 5 \times 7^3 = 20 \times 7^3$$

1. Reduce:

$$F = \frac{26!\,.\,27 + 25!}{19\,.\,25!}$$

A) 37 B) 24 C) 19 D) 25 E) 6!

2. Resuelve:

$(x^2 - 2x)! = 6$

Halla el número de soluciones.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. Halla x, en:

$$\frac{(x+1)!(x+3)!}{(x+1)!+(x+2)!} = 24$$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

4. Halla x, en:

$$C_{15}^{35} = \frac{(x+5)!}{20!\,.\,15!}$$

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 40

5. Laura tiene nueve amigas en la academia y quiere invitarlas a su casa para escuchar música, pero su mamá le ha dicho que solo invite a cinco de ellas. ¿De cuántas maneras podrá invitar a las cinco amigas, si de todas maneras debe invitar a Rita que es su mejor amiga?

A) 70 B) 35 C) 140 D) 135 E) 170

6. ¿De cuántas maneras se pueden disponer seis jugadores de futbol en una cancha, si uno de ellos siempre juega de arquero?

A) 120 B) 72 C) 720 D) 30 E) 180

7. Una pista atlética tiene 5 carriles y tres atletas desean colocarse en la pista. ¿De cuántas maneras lo pueden hacer, de modo que cada atleta ocupe un carril?

A) 20 B) 30 C) 10 D) 50 E) 60

8. En un concurso de periódico mural, organizado por una institución, hay 5 finalistas. ¿De cuántas maneras diferentes pueden obtener los premios estos 5 finalistas, si hay premios para los 5 puestos?

A) 24 B) 60 C) 72 D) 120 E) 240

9. Un grupo de 5 amigos se irá de paseo, el auto que van a utilizar tiene 2 asientos adelante y 3 atrás. ¿De cuántas maneras se podrán sentar correctamente para iniciar dicho paseo, si solo 2 de ellos saben manejar?

A) 24 B) 36 C) 48 D) 120 E) 60

10. ¿De cuántas formas pueden ordenarse 5 personas en una fila si una de ellas debe estar siempre en uno de los extremos?

A) 24 B) 48 C) 72 D) 36 E) 120

11. ¿Cuál es el mayor número de banderas diferentes que se pueden confeccionar disponiendo de tres colores y con un máximo de 2 costuras verticales?

A) 16 B) 18 C) 12 D) 9 E) 15

12. En un colegio hay 3 cargos disponibles: director, coordinador y supervisor. Después de estudiar las solicitudes de los postulantes se selecciona a 10 candidatos cuya experiencia profesional los acredita para cualquiera de los cargos. ¿De cuántas maneras se puede realizar la elección si ninguno puede ocupar más de un cargo?

A) 720 B) 810 C) 1000 D) 600 E) 120

13. De un grupo de cinco físicos, siete químicos y seis matemáticos se quiere formar una comisión de tres físicos, cuatro químicos y tres matemáticos. ¿De cuántas maneras o formas diferentes se puede hacer dicha selección?

A) 600 B) 648 C) 700 D) 6048 E) 7000

14. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 9 juguetes entre 4 niños si el menor recibe 3 juguetes y cada uno de los restantes recibe 2?

A) 7560 B) 7850 C) 7989 D) 6687 E) 8437

Claves

1. A
2. B
3. A
4. D
5. A
6. A
7. E
8. D
9. C
10. B
11. E
12. A
13. E
14. A

Reto



Calcula el valor de E:

$$E = C_0^{n-2} + C_1^{n-2} + C_2^{n-2} + \ldots + C_{n-2}^{n-2}$$

Rpta.: 2^{n-2}

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Simplifica:

$$A = \frac{15! + 16! + 17!}{\underline{|15} + \underline{|16}} + \frac{(3!)!}{6!}$$

A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

2. Calcula:

$$\frac{\underline{|400}}{\underline{|399}} + \frac{\underline{|100}}{\underline{|99}} + \frac{\underline{|4}}{\underline{|3}}$$

A) 400 B) 100 C) 45 D) 504 E) 506

3. Reduce:

$$\frac{\frac{21}{8}\cdot\frac{20}{7}\cdot\frac{19}{6}C_5^{18}}{C_5^{18} + C_{12}^{18} + C_{12}^{19} + C_8^{20}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. Resuelve: $(x^2 + x)! = 720$

Halla el número de soluciones.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. Si deseas viajar a Chile y dispones de 3 barcos, 5 aviones y 4 buses (todos diferentes entre sí), ¿de cuántas maneras puedes realizar dicho viaje?

A) 11 B) 60 C) 12 D) 42 E) 51

6. De Lima a Ica existen 4 caminos diferentes y de Ica a Tacna 5 caminos también diferentes.

¿De cuántas maneras diferentes se podrá ir de Lima a Tacna pasando siempre por ica?

A) 9 B) 20 C) 12 D) 40 E) 625

7. De Lima a Ica existen 4 caminos diferentes y de Ica a Tacna 5 caminos también diferentes.
¿De cuántas maneras diferentes se podrá ir de Lima a Tacna y regresar, si la ruta de regreso debe ser diferente a la de ida?

A) 400 B) 380 C) 240 D) 399 E) 401

Enunciado para los problemas 8; 9 y 10

Lalo tiene 6 pantalones, 4 camisas y 5 pares de zapatos, todos de diferentes colores entre sí.

8. ¿De cuántas maneras diferentes puede vestirse?

A) 15 B) 240 C) 60 D) 120 E) 72

9. ¿De cuántas maneras diferentes puede vestirse, si 3 de los pantalones fueran iguales?

A) 120 B) 60 C) 80 D) 12 E) 720

10. ¿De cuántas maneras puede vestirse, si la camisa blanca siempre la usa con el pantalón azul?

A) 95 B) 80 C) 120 D) 61 E) 91

11. ¿De cuántas maneras diferentes se puede vestir una persona que tiene 6 ternos (iguales), 5 pares de medias (3 iguales), 2 pares de zapatos, 8 corbatas (2 iguales) y 6 camisas (3 iguales)?



A) 420 B) 168 C) 288 D) 840 E) 2880

12. Si Juan tiene 4 camisas, 5 pantalones y 3 pares de zapatos, ¿de cuántas maneras se podría vestir combinando sus prendas?

- Si la camisa azul la debe emplear con el pantalón negro.
- Si el pantalón azul lo debe emplear con la camisa blanca.
- Si la camisa verde no la emplea ni con el pantalón blanco ni con el celeste.
- Si el pantalón crema no lo emplea ni con la camisa blanca ni con la camisa verde.

Da como respuesta la suma de los resultados.

A) 264 B) 246 C) 156 D) 462 E) 207

NIVEL 2

13. Halla x, en: $(x + 5)! = 720$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 1

14. Calcula x, en: $3C_4^x = 5C_5^{x-1}$

A) 10 B) 1 C) 9 D) 8 E) 16

15. Calcula m, en: $\dfrac{(m+3)!\,(m+5)!}{(m+3)! + (m+4)!} = 120$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 12

16. Calcula un valor de n + p, en: $C_{p-2}^{2n} = C_{10-p}^{2n}$

A) 4 B) 6 C) 10 D) 14 E) 15

17. Un juego consiste en un tablero cuadriculado de 4 × 4. ¿De cuántas formas distintas pueden colocarse 2 fichas, sin que estén en la misma columna ni en la misma fila?

A) 64 B) 56 C) 132 D) 144 E) 256

18. Para ir de A hacia B existen 6 caminos y para ir de B a C existen 5 caminos. De cuántas maneras se puede:

- Ir de A hacia C pasando por B.
- Ir de A hacia C pasando por B y regresar.
- Ir de A hacia C pasando por B y regresar en un camino diferente.

Da como respuesta la suma de los 3 resultados.

A) 1500 B) 1530 C) 1350
D) 1800 E) 1580

19. ¿De cuántas maneras se pueden escoger en el tablero de 6 × 6 una casilla blanca y una negra que no estén en una misma línea horizontal y vertical?

A) 701 B) 720 C) 216 D) 920 E) 120

20. Si Julia tiene para vestirse 5 pantalones, 3 faldas, 6 blusas, 2 polos y 8 pares de zapatos, ¿de cuántas maneras podría vestirse, si todas las prendas son de colores diferentes?

A) 512 B) 510 C) 720 D) 729 E) 448

21. 6 personas deben levantar un cilindro circular recto lleno de agua, abierto en la parte superior. ¿De cuántas maneras se pueden colocar alrededor del cilindro?

A) 60 B) 24 C) 120 D) 720 E) 840

22. Una familia con 3 hijos salen al campo. Una vez que llegaron al campo prenden una fogata. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar los miembros de esta familia alrededor de la fogata, de modo que los padres siempre estén juntos?



A) 12 B) 24 C) 48 D) 96 E) 60

23. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse una consonante y una vocal de las letras de la palabra PROBLEMA?

A) 4 B) 7 C) 12 D) 15 E) 20

24. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar 8 personas en un automóvil con capacidad para 5, sabiendo que Eulogio siempre es el conductor?



A) 35 B) 210 C) 21 D) 120 E) 840

NIVEL 3

25. Suma:

$$K = \frac{\lfloor\underline{11} - \lfloor\underline{10}}{\lfloor\underline{9}} + \frac{\lfloor\underline{10} - \lfloor\underline{9}}{\lfloor\underline{8}} + \frac{\lfloor\underline{9} - \lfloor\underline{8}}{\lfloor\underline{7}} + \dots + \frac{\lfloor\underline{2} - \lfloor\underline{1}}{\lfloor\underline{0}}$$

A) 55 B) 77 C) 285 D) 85 E) 385

26. Halla x, en: $C_{30}^{50} = \frac{(x+5)!}{30!\ .\ 20!}$

A) 40 B) 30 C) 35 D) 50 E) 45

27. Si: x; y $\in \mathbb{Z}^+$ resuelve la ecuación:

$$1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$$

Indica el número de soluciones que existen.

A) Ninguna B) 1 C) 2
D) 3 E) Infinitos valores

28. Calcula x + y, si: $x^{(y!)!} \cdot (x-1)!^{(y!)!} = 120^{720}$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

29. De cuántas maneras pueden sentarse 5 personas:
- En una fila de 5 asientos.
- En una fila de 5 asientos con Juan en el centro.
- En una fila de 5 asientos con Raúl en un extremo.
- En una fila de 5 asientos con Luis y María siempre juntos.

Da como respuesta la suma de los resultados.

A) 180 B) 240 C) 160 D) 200 E) 120

30. Un barco lleva 8 banderas para hacer señales:
- ¿Cuántas señales se podrían enviar empleando solo 3 de ellas?
- ¿Cuántas señales se podrían enviar con 4 de ellas empezando con la roja y terminando con la azul?
- ¿Cuántas señales se podrían enviar con 5 de ellas si la blanca y la azul deben estar en los extremos?

Da como respuesta la suma de los resultados.

A) 1000 B) 1760 C) 670 D) 591 E) 606

31. ¿De cuántas maneras diferentes 2 peruanos, 4 argentinos y 3 colombianos pueden sentarse en fila, de modo que los de la misma nacionalidad se sienten juntos?

A) 864 B) 1700 C) 892 D) 688 E) 1728

32. Dos varones y tres chicas van al cine y encuentran 5 asientos juntos, en una misma fila, donde desean acomodarse. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse si las tres chicas no quieren estar una al costado de la otra?



A) 10 B) 16 C) 18 D) 15 E) 12

33. De un grupo de 15 personas que estudian solo 2 idiomas cada una, se sabe que 4 de ellas estudian inglés y alemán, 5 inglés y francés y las otras solo alemán y francés. Si se quiere escoger 2 personas que hagan juntas la traducción de una lectura a cualquiera de los 3 idiomas mencionados, ¿de cuántas formas se puede elegir?

A) 28 B) 74 C) 92 D) 48 E) 120

34. Con seis pesas de a; b; c; d; e y f kg, ¿cuántas pesadas diferentes pueden obtenerse tomadas aquellas de tres en tres?

A) 15 B) 20 C) 120 D) 60 E) 30

Claves

NIVEL 1
1. B
2. D
3. A
4. B
5. C
6. B
7. C
8. D
9. C
10. B
11. B
12. E

NIVEL 2
13. E
14. A
15. A
16. C
17. D
18. B
19. C
20. A
21. C
22. A
23. D
24. E

NIVEL 3
25. E
26. E
27. B
28. C
29. B
30. E
31. E
32. E
33. B
34. B

Probabilidades

CONCEPTOS PREVIOS

Nota

En muchos casos no es necesario determinar los elementos del espacio muestral, solo interesa saber cuántos elementos existen, para lo cual usaremos conceptos del análisis combinatorio.

Experimento aleatorio (ε)

Es toda prueba o conjunto de pruebas, cuyo resultado no puede determinarse antes de realizar la prueba. Solo se conocen todos los resultados posibles.

Ejemplos:

ε_1: lanzar un dado.

ε_2: sacar un naipe de una baraja.

Atención

Los subconjuntos del espacio muestral constituidos por un solo elemento se llaman "eventos elementales".



Espacio muestral (Ω)

Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Ejemplos:

- Del experimento aleatorio de lanzar un dado, su espacio muestral será:
  $\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- Del experimento aleatorio de sacar un naipe de una baraja, su espacio muestral será:
  $\Omega_2 = \{A; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; J; Q; K\}$

Evento

Es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Ejemplos:

- En el experimento aleatorio de lanzar un dado.
  Evento A: obtener un número par.
  $A = \{2; 4; 6\}$
- En el experimento aleatorio de sacar un naipe.
  Evento B: obtener puntaje mayor que 10.
  $B = \{J; Q; K\}$

Observación

- Al evento que coincide con el espacio muestral se le llama evento seguro.
- Al evento que no posee elementos se le llama evento imposible.



Operaciones con eventos

Como los eventos son conjuntos, entonces se pueden establecer las operaciones: unión, intersección y complemento.

Si A y B son dos eventos de un espacio muestral Ω, se definen las siguientes operaciones:

- $A \cup B$: ocurre A, ocurre B o ambos
- $A \cap B$: ocurre A y ocurre B
- $A - B$: ocurre A pero no B
- A': no ocurre A

Definición clásica de probabilidad

Si A es un evento de un espacio muestral Ω, entonces la probabilidad de ocurrencia de A se denota por P(A) y está dada por:

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número de resultados posibles}}$$

Ejemplo:
Si se extrae una carta de un juego completo de naipes, ¿cuál es la probabilidad de que sea de trébol?

Resolución:

- Un juego de naipes tiene 4 palos (trébol, corazones, espadas y diamantes).
- Cada una consta de 13 naipes.
- Entonces, el número de casos favorables es 13 y el número de casos posibles es 52.
- Utilizando la definición:

$$P = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Propiedades

a) Si A es un evento definido en cierto espacio muestral Ω, se cumple que:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

b) Si A y B son eventos no excluyentes ($A \cap B \neq \varnothing$), entonces se cumple que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

c) Si A y B son eventos mutuamente excluyentes ($A \cap B = \varnothing$), entonces se cumple que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

d) Si A es un evento definido en cierto espacio muestral Ω, la probabilidad de que no ocurra A se denota por P(A') y se cumple:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Probabilidad condicional

Es la probabilidad de ocurrencia de un suceso B dado que ha ocurrido el suceso A, denotado por P(B/A) y es por definición:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \; ; \; P(A) > 0$$

Indepedencia de sucesos

Dos sucesos son independientes entre sí, si la ocurrencia de uno de ellos no afecta para nada a la ocurrencia del otro.

Ejemplo:

En el experimento de lanzar dos dados, el suceso de que uno de ellos salga un número par y el suceso de que el otro salga impar, son independientes, puesto que la ocurrencia de uno no influye en la ocurrencia del otro.

Propiedades:

Si dos sucesos A y B son independientes, se cumple:

$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$

$P(A/B) = P(A)$

$P(B/A) = P(B)$



Observación

Decimos que dos sucesos son mutuamente excluyentes si al ocurrir uno es imposible que ocurra el otro.

Ejemplo:
Al tirar una moneda, si sale cara es obvio que no salió sello.

A = Sale cara
B = Sale sello

$A \cap B = \varnothing$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Observación

- Si A es un evento imposible:
  $\Rightarrow P(A) = 0$
- Si A es un evento seguro:
  $\Rightarrow P(A) = 1$



Problemas resueltos

1 Al lanzar dos dados sobre una mesa. ¿Cuál es la probabilidad de no obtener un puntaje mayor que 9?

Resolución:

Los casos de obtener un puntaje mayor que 9 son:

A = {(4; 6), (5; 5), (5; 6), (6; 4), (6; 5), (6; 6)}

n(A) = 6

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

∴ La probabilidad de no obtener un puntaje mayor que 9 es $\frac{5}{6}$.

2 Se lanza un par de dados. Si los números que resultan son diferentes, halla la probabilidad de que su suma sea par.

Resolución:

A: obtener un par de números diferentes.
Analizamos su complemento:

A' = {(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (6; 6)}

n(A') = 6

⇒ n(A) = 36 – n(A') = 36 – 6 = 30

En este caso el espacio muestral es A, debido a que los números que resultan son siempre diferentes.

B: obtener dos números diferentes cuya suma sea par.

B = {(1; 3), (1; 5), (2; 4), (2; 6), (3; 1), (3; 5), (4; 2), (4; 6), (5; 1), (5; 3), (6; 2), (6; 4)}

n(B) = 12

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(A)} = \frac{12}{30}$$

$$\therefore P(B) = \frac{2}{5}$$

3 En una bolsa hay 6 bolas rojas y 8 bolas negras. Si se extraen 2 bolas, una a continuación de la otra, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos bolas negras?

Resolución:

A: se obtuvo una bola negra en la 1.ª extracción.
n(A) = 8, n(Ω) = 6 + 8 = 14

$$P(A) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

B: se obtuvo una bola negra en la 2.ª extracción.
Entonces:

$$P(B/A) = \frac{7}{6+7}$$

$$P(B/A) = \frac{7}{13}$$

∴ La probabilidad de obtener dos bolas negras es: $P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{13}$

4 En una urna, se tienen 3 fichas negras, 5 blancas y 3 amarillas. Si se extrae al azar una de las fichas, halla la probabilidad de que la bola extraída no sea negra.

Resolución:

n(Ω) = 3 + 5 + 3 = 11

A: sea una bola de color negro

⇒ n(A) = 3

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{11}$$

$$\therefore P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$$

5 Al lanzar tres monedas al aire, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 caras y 1 sello?

Resolución:

Ω = {CCC; CCS; CSS; CSC; SCC; SSC; SCS; SSS}

n(Ω) = 8

A: obtener 2 caras y 1 sello

A = {CCS; CSC; SCC}

⇒ n(A) = 3

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

6 Si se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados sea menor que seis?

Resolución:

Sean:
ε: lanzar dos dados
A: suma menor que 6.

A = {(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (4; 1)}

$\Rightarrow n(A) = 10$
$n(\Omega) = 6 \times 6 = 36$

Luego:
$\Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$

7 Pedro rinde una práctica calificada y la calificación es de 0 a 20. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga una nota par mayor que 12?

Resolución:

$\Omega = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; ...; 20\} \Rightarrow n(\Omega) = 21$

A: nota par mayor que 12.

$\Rightarrow A = \{14; 16; 18; 20\} \Rightarrow n(A) = 4$

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{21}$

8 Al lanzar dos dados A y B, determina la probabilidad de que la suma de ambos dados no sea mayor que 7.

Resolución:

Sean:
ε: lanzar dos dados.
A: suma no sea mayor que 7.

A = {(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (5; 1), (5; 2), (6; 1)}

$\Rightarrow n(A) = 21,\ n(\Omega) = 6 \times 6 = 36$

Nos piden:

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{21}{36} = \dfrac{7}{12}$

9 Una urna contiene 2 bolas blancas, 8 negras y 6 rojas, si se extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de obtener una bola blanca o negra?

Resolución:

Sean:

A: obtener bola blanca $\Rightarrow n(A) = 2$

B: obtener bola negra $\Rightarrow n(B) = 8$

C: obtener bola roja $\Rightarrow n(C) = 6$

$n(\Omega) = n(A) + n(B) + n(C) = 16$

Luego:

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$

$P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$

Como los eventos son excluyentes, entonces:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \cup B) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{8}$

10 La probabilidad que mañana llueva es 0,11; la probabilidad que truene es 0,05 y la probabilidad que llueva y truene es 0,04. ¿Cuál es la probabilidad que llueva o truene mañana?

Resolución:

Sean:

A: que llueva $\Rightarrow P(A) = 0{,}11$

B que truene $\Rightarrow P(B) = 0{,}05$

Además: $P(A \cap B) = 0{,}04$

Nos piden la probabilidad de que llueva o truene mañana: $P(A \cup B)$

Sabemos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = 0{,}11 + 0{,}05 - 0{,}04$

$\therefore P(A \cup B) = 0{,}12$

Actividades de razonamiento

1. Si se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que 2?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{2}{5}$

2. En una urna hay 8 fichas negras y 5 fichas blancas. Si se extrae una ficha al azar, ¿cuál es la probabilidad que sea de color negro?

A) $\frac{7}{15}$ B) $\frac{3}{17}$ C) $\frac{8}{13}$ D) $\frac{9}{13}$ E) $\frac{5}{31}$

3. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un sello en el lanzamiento de 3 monedas?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{7}{8}$

4. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 o 4 al lanzar un dado?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

5. Se escribe al azar un número de 2 cifras, ¿cuál es la probabilidad de que dicho número escrito sea múltiplo de 5?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{13}$ C) $\frac{2}{15}$ D) $\frac{1}{17}$ E) $\frac{3}{17}$

6. Al lanzar dos dados A y B, determina la probabilidad de que la suma de ambos dados no supere a 7.

A) $\frac{7}{12}$ B) $\frac{12}{13}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{7}{36}$ E) $\frac{1}{3}$

7. Se lanza simultáneamente una moneda y un dado. Calcula la probabilidad de obtener una cara y un número impar.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

8. Se lanza un dado dos veces en forma sucesiva. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos resultados sean de puntaje 3?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{36}$ E) $\frac{1}{4}$

9. Al lanzar dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado del primer dado sea mayor que el segundo?

A) $\frac{1}{18}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{7}{18}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{4}$

10. La probabilidad que mañana llueva es 0,10; la probabilidad que truene es 0,05 y la probabilidad que llueva y truene es 0,03. ¿Cuál es la probabilidad que llueva o truene ese día?

A) 0,12 B) 0,06 C) 0,18
D) 0,36 E) 0,05

11. De una baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que, al extraer una carta al azar, esta sea 8 o de figura de color negro?

A) $\frac{4}{13}$ B) $\frac{7}{13}$ C) $\frac{1}{52}$ D) $\frac{1}{13}$ E) $\frac{2}{13}$

12. Se extrae un bolo de un total de 10 (los bolos están enumerados del 1 al 10). ¿Cuál es la probabilidad que dicho bolo sea múltiplo de 3, si se sabe que fue par?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

13. En una urna donde hay 7 bolas blancas, 5 bolas rojas y 3 bolas azules. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer 2 bolas, estas sean de color rojo?

A) $\frac{16}{17}$ B) $\frac{3}{20}$ C) $\frac{2}{21}$ D) $\frac{19}{21}$ E) $\frac{5}{9}$

14. En una competencia atlética de 100 m intervienen los atlétas A, B, C, D y E
¿Cuál es la probabilidad de que al finalizar "B" llegue luego de "A"?

A) 2/3 B) 3/5 C) 1/3 D) 1/5 E) 4/5

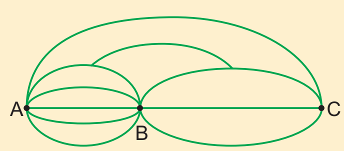
Claves

1. B 5. A 9. B 13. C
2. C 6. A 10. A 14. D
3. E 7. C 11. B
4. A 8. D 12. B

Reto



¿Cuál es la probabilidad que una persona que avanza de A a C no pase por B?



Rpta.: 2/17

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Se extrae al azar una carta de una baraja normal. Calcula la probabilidad de obtener un 4 o un 6.

A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{2}{13}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{15}{26}$

2. Si la probabilidad de que usted se retire temprano a su casa el día de hoy es 0,163, ¿cuál es la probabilidad de que no lo haga?

A) 0,037 B) 0,137 C) 0,738
D) 0,837 E) 0,177

3. En una urna se tienen 4 bolas de color rojo; 6 bolas de color verde y 8 bolas de color azul. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bola, sea de color verde o azul?

A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{7}{9}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{3}{8}$

4. Se lanza un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que 4?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

5. Al lanzar dos dados, determina la probabilidad de que la suma de ambos dados no supere a diez.

A) $\frac{11}{15}$ B) $\frac{11}{17}$ C) $\frac{11}{12}$ D) $\frac{9}{17}$ E) $\frac{7}{15}$

6. Se lanza simultáneamente una moneda y un dado. Calcula la probabilidad de obtener una cara y un número par.



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{6}$ D $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

7. La probabilidad de que un comerciante venda 2 autos o más hoy es 0,38. ¿Cuál es la probabilidad de que venda 1 o ninguno?

A) 0,71 B) 0,78 C) 0,62 D) 0,48 E) 0,96

8. Para dos eventos A y B mutuamente excluyentes es verdad:

I. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
II. $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$
III. $P(A) + P(B) = 1$

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) II y III E) I; II y III

NIVEL 2

9. Se extrae al azar una carta de una baraja normal. Calcula la probabilidad de que represente su valor con una letra.

A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{3}{13}$ C) $\frac{2}{13}$ D) $\frac{5}{26}$ E) $\frac{1}{9}$

10. 3 deportistas (A; B y C) compiten en una maratón de los Andes. ¿Cuál es la probabilidad de que A llegue antes que B?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

11. En una caja hay 18 tarjetas blancas, 8 negras, 6 azules, 9 verdes y 3 amarillas. Sin mirar se saca una tarjeta, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca o negra?

A) $\frac{13}{22}$ B) $\frac{6}{11}$ C) $\frac{27}{44}$ D) $\frac{11}{22}$ E) $\frac{3}{11}$

12. En una urna se encuentran 50 fichas marcadas del 1 al 50. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una ficha, esta sea múltiplo de 5 u 8?

A) $\frac{8}{25}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{10}$ E) $\frac{6}{25}$

13. Una moneda cuyas caras están marcadas con los números 2 y 3 respectivamente es lanzada 5 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 12?

A) $\frac{25}{16}$ B) $\frac{5}{16}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{6}{25}$ E) $\frac{5}{6}$

14. Un artillero dispara a un blanco. Se sabe que en un disparo la probabilidad de acertar es 0,01. Se efectúa dos disparos, ¿cuál será la probabilidad de no acertar?

A) 0,9999 B) 0,9081 C) 0,9801
D) 0,9802 E) 0,0001

15. Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 negras; otra contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Si se extrae al azar una bola de cada urna, calcula la probabilidad de que ambas sean de color blanco.



A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

16. Acerca del futuro nacimiento de tres hijos (trillizos) de la señora Rosa, se puede afirmar:

I. El número de elementos que tiene el espacio muestral respecto al sexo de ellos es 8.
II. La probabilidad de que nazca un varón es 1/3.
III. La probabilidad de que nazca un varón y dos mujeres es 3/8.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y III E) II y III

NIVEL 3

17. En una bolsa hay 12 esferitas, de las cuales 4 son negras, 5 son rojas y el resto de otros colores.

¿Qué afirmaciones son ciertas?

I. Al sacar una esferita al azar, la probabilidad que sea roja es 5/12.
II. Al sacar 3 esferitas al azar, la probabilidad que sean negras es 1/55.
III. Al sacar 7 esferitas al azar, el número de elementos que tiene el espacio muestral es 792.

A) Solo I B) Solo III C) I y II
D) II y III E) I; II y III

18. En un jardín de infantes hay 12 niños y 4 niñas, se escogen tres estudiantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sean todas niñas?

A) $\frac{2}{65}$ B) $\frac{2}{35}$ C) $\frac{1}{70}$ D) $\frac{2}{70}$ E) $\frac{1}{140}$

19. De una baraja de 52 cartas se sacan tres naipes. Determina la probabilidad de que todos sean ases.

A) 1/5530 B) 1/5525 C) 1/1520
D) 1/1260 E) 1/3725

20. Un saco contiene 3 bolas rojas, 4 blancas y 5 azules, todas del mismo tamaño y forma. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea roja y las siguientes azules o blancas al seleccionarse 3 bolas sin reposición?

A) 0,2727 B) 0,004545 C) 0,1636
D) 0,2083 E) 0,07272

21. En una ciudad el 40% de la población canta; el 35% baila y el 70% de los que cantan bailan, calcula la probabilidad de que al extraer una persona al azar esta no cante ni baile.

A) 47% B) 53% C) 51%
D) 49% E) 42%

22. La probabilidad de que Erica ingrese a la UNI es 0,7; que ingrese a la Católica es 0,4. Si la probabilidad de que no ingrese a ninguna es 0,12, halla la probabilidad de que ingrese a ambas a la vez

A) 0,42 B) 0,22 C) 0,24
D) 0,48 E) 0,58

23. Si la probabilidad de ganar una partida de ajedrez es p, ¿cuál será la probabilidad de ganar al menos una partida en 3 partidas de ajedrez?



A) $1 - p$ B) $(1 - p)^3$
C) $(1 - p)^2$ D) $1 - (1 - p)^3$ E) $(10 - p)^2$

24. Si tenemos 12 libros en un estante, ¿cuál es la probabilidad de que siempre se incluya un libro determinado en una colección de 5 libros?



A) 0,2325 B) 0,543 C) 0,4672
D) 0,4166 E) 0,4327

25. Se escogen al azar 4 sillas entre 10, de las cuales 6 son defectuosas. Halla la probabilidad de que 2 exactamente sean defectuosas.

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{6}{11}$ E) $\frac{3}{7}$

Claves

NIVEL 1	7. C	13. B	19. B
1. B	8. A	14. C	20. C
2. D	**NIVEL 2**	15. C	21. B
3. B	9. B	16. D	22. B
4. A	10. B	**NIVEL 3**	23. D
5. C	11. A	17. E	24. D
6. B	12. D	18. E	25. E

Teoría de conjuntos

Noción de conjunto

Es una colección o agrupación de objetos abstractos o concretos denominados elementos.

Ejemplos:

- Los países de Europa.
- Los números pares menores que 100.

Relación de pertenencia

Es una relación exclusiva de elemento a conjunto.

Ejemplo:
$D = \{3; 6; 7; 9\}$

- $6 \in D$, se lee: 6 pertenece a D.

DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

Por extensión

Cuando se indica a todos y cada uno de sus elementos.

Ejemplo:

- $F = \{3; 6; 9; 12; 15\}$

Por comprensión

Cuando se indica una propiedad que caracteriza a todos los elementos del conjunto.

Ejemplo:

- $J = \{n^2 - 1 / n \text{ es entero y } 1 < n < 5\}$

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Inclusión (⊂)

Sean A y B dos conjuntos. Decimos que A está contenido en B, (A es subconjunto de B) si todo elemento de A es también elemento de B.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Ejemplo:
Sean los conjuntos:
$A = \{3; 5; 7; 9; 10\}$
$B = \{3; 5; 10\}$ y $C = \{5; 9; 12\}$

$B \subset A$; se lee: B está contenido en A
$C \not\subset A$; se lee: C no está contenido en A

Igualdad

Dos conjuntos A y B son iguales si poseen los mismos elementos.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Ejemplo:
$A = \{3n + 2 / n \in \mathbb{Z} \wedge 1 < n < 6\}$
$B = \{8; 11; 14; 17\}$
Se observa que $A \subset B \wedge B \subset A$, luego: $A = B$

Conjuntos comparables

Dos conjuntos A y B son comparables cuando uno de ellos está contenido en el otro.

Ejemplo:
$M = \{4; 6\}$
$N = \{1; 3; 5; 8\}$
$P = \{2; 4; 6; 9\}$
$Q = \{3; 8\}$

$M \subset P$, entonces M y P son comparables.
$Q \subset N$, entonces Q y N son comparables.

Conjuntos disjuntos

Dos conjuntos A y B son disjuntos cuando no tienen ningún elemento en común.

Ejemplo:
$R = \{x / x \text{ es par}\}$ y $S = \{x / x \text{ es impar}\}$
Es claro que R y S son disjuntos.

Importante

Tal que
$C = \{\ldots\ldots\ldots\ldots / \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
Forma general del elemento — Característica o propiedad común



Nota

- Todo conjunto está incluido en sí mismo o es equivalente, es decir:
  $\forall A$, se cumple: $A \subset A$
- Por convención, se asume que el conjunto vacío ({ }, ∅) es subconjunto de cualquier conjunto, es decir:
  $\forall\ A \Rightarrow \varnothing \subset A$

Recuerda

A y B son iguales si tienen los mismos elementos.
$A \subset B$ (A está incluido en B) y
$B \subset A$ (B está incluido en A)



Nota

- $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$
- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Leftrightarrow$ A y B son disjuntos
- $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow$ A y B son disjuntos
- $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

Atención

- $A - B = A \Leftrightarrow$ A y B son disjuntos
- $A - B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset B$
- $A \Delta B = A \cup B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$
- $A \Delta B = B - A \Leftrightarrow A \subset B$



Recuerda

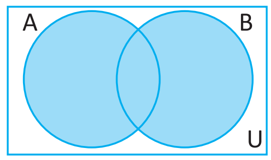
$B \subset A' \Leftrightarrow$ A y B son disjuntos
$B' \subset A' \Leftrightarrow A \subset B$



OPERACIONES CON CONJUNTOS

1. Unión (∪)

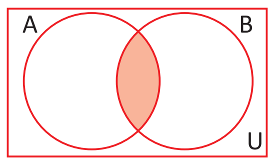
$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$



$A \cup B = B \cup A$

2. Intersección (∩)

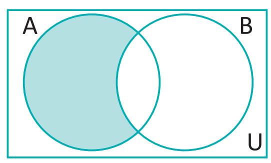
$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$



$A \cap B = B \cap A$

3. Diferencia (–)

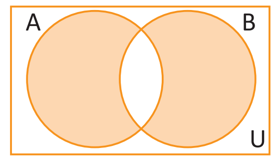
$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$



$A - B$

4. Diferencia simétrica (△)

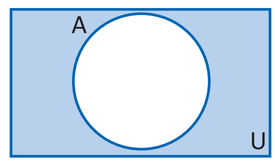
$A \Delta B = \{x / x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$



$A \Delta B = B \Delta A$

5. Complemento

$A' = A^C = \overline{A} = \{x \in U / x \notin A\}$



A'

NÚMERO DE SUBCONJUNTOS

Sea el conjunto A, el número de subconjuntos está dado por:

$$\text{Número de subconjuntos de A} = 2^{n(A)}$$

Ejemplo:
$B = \{3; 5; 8\}$; $n(B) = 3$
Subconjuntos de B: {3}; {5}; {8}; {3; 5}; {5; 8}; {3; 8}; {3; 5; 8}; ∅
$\therefore$ Número de subconjuntos de $B = 2^3 = 8$

CONJUNTO POTENCIA

Es aquel conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. El número de elementos del conjunto potencia está dado por:

$$n[P(A)] = 2^{n(A)}$$

Ejemplo:
$A = \{2; 4; 6\}$
$P(A) = \{\varnothing; \{2\}; \{4\}; \{6\}; \{2; 4\}; \{4; 6\}; \{2; 6\} \{2; 4; 6\}\}$
$n[P(A)] = 2^3 = 8$

CONJUNTO UNITARIO

También llamado singletón o singular, es aquel conjunto que posee un solo elemento.
Ejemplo:
$A = \{x / x > 0 \wedge x^2 = 16\}$
Se observa que hay un solo número que cumple con la condición, y ese es x = 4, por lo tanto el conjunto A es unitario: A = {4}

Problemas resueltos

1 Determina la suma de los elementos del conjunto B.

$$B = \left\{ \frac{x^2 - 25}{x - 5} \,/\, x \in \mathbb{N} \wedge 5 < x < 10 \right\}$$

Resolución:

Del enunciado:

$$\frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)} = x + 5$$

Como: $5 < x < 10$

$x \in \{6; 7; 8; 9\}$

Se tiene que:

$B = \{11; 12; 13; 14\}$

$\therefore$ La suma de elementos es: $11 + 12 + 13 + 14 = 50$

2 Dados los conjuntos:

$A = \{a^2 + 5; b + 3\}$

$B = \{-11; 14\}$

Si $A = B$, calcula el valor de $a + b$; si: $a; b \in \mathbb{Z}^-$

Resolución:

Como: $A = B$

$a^2 + 5 = 14 \;\wedge\; b + 3 = -11$

$a^2 = 9 \quad b = -14$

$a = \pm 3$

$a = 3 \;\vee\; a = -3$ pero $a \in \mathbb{Z}^-$

Entonces: $a = -3$

$\therefore a + b = -3 - 14 = -17$

3 El conjunto potencia de A tiene 512 elementos más que el conjunto potencia de B.
Además $n(A) - n(B) = 1$. Halla: $n(A) + n(B)$

Resolución:

Del dato:

$n(A) - n(B) = 1$

$\Rightarrow n(A) = n(B) + 1$

También:

$P(A) - P(B) = 512$

$2^{n(B)+1} - 2^{n(B)} = 2^9$

$2^{n(B)} = 2^9$

$\Rightarrow n(B) = 9$

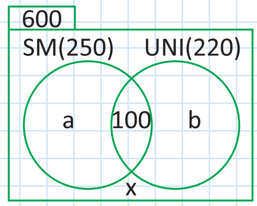
$\Rightarrow n(A) = 10$

$\therefore n(A) + n(B) = 10 + 9 = 19$

7 De un grupo de 600 alumnos se sabe que 250 postulan a San Marcos, 220 postulan a la UNI; y 100 postulan a San Marcos y la UNI. ¿Cuántos no postulan a San Marcos ni a la UNI?

Resolución:

Graficando según el enunciado:



Del gráfico:

$a + 100 = 250 \Rightarrow a = 150$

$b + 100 = 220 \Rightarrow b = 120$

Luego:

$a + 100 + b + x = 600$

$150 + 100 + 120\, x = 600$

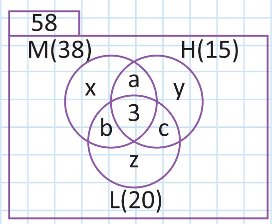
$370 + x = 600$

$x = 230$

5 En un colegio hay 58 profesores, de los cuales 38 enseñan Matemática, 15 Historia y 20 Lenguaje, si hay 3 profesores que enseñan los 3 cursos. ¿Cuántos de ellos enseñan solo 2 de estos cursos?

Resolución:

Gráficamente se tiene:



Del gráfico:

$x + a + b + 3 = 38$

$y + a + c + 3 = 15$

$z + b + c + 3 = 20$

$x + y + z + 2(a + b + c) + 9 = 73 \ldots \text{(I)}$

También:

$x + y + z + a + b + c + 3 = 58 \quad \ldots \text{(II)}$

Luego: (I) – (II)

$a + b + c + 6 = 15$

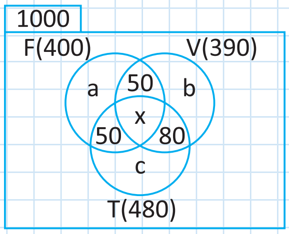
$a + b + c = 9$

$\therefore$ 9 profesores enseñan solo dos cursos.

6 En ciertas olimpiadas participan 1000 deportistas en 3 deportes: fútbol, vóley y tenis; 400 participan en fútbol; 390 en vóley y 480 en tenis. 50 solo en fútbol y vóley, 80 solo en vóley y tenis, y 50 solo en fútbol y tenis. ¿Cuántos participan en un solo deporte?

Resolución:

Graficando según el enunciado:



Del gráfico:

$$\left.\begin{aligned} a + 100 + x &= 400 \\ b + 130 + x &= 390 \\ c + 130 + x &= 480 \end{aligned}\right\} (+)$$

$a + b + c + 360 + 3x = 1270$ ... (I)

También:
$a + b + c + 180 + x = 1000$ ... (II)

Restamos: (I) – (II):
$180 + 2x = 270 \Rightarrow x = 45$

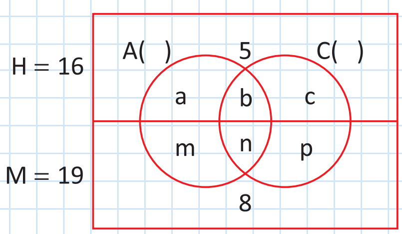
Reemplazando en (II):
$a + b + c + 225 = 1000 \Rightarrow a + b + c = 775$

$\therefore$ 775 personas participan en un solo deporte.

7 En un aula de 35 alumnos, 7 hombres aprobaron Aritmética y 6 hombres aprobaron Comunicación. 5 hombres y 8 mujeres no aprobaron ningún curso, hay 16 hombres en total. 5 alumnos aprobaron los 2 cursos y 11 aprobaron solo Aritmética. ¿Cuántas mujeres aprobaron solo Comunicación?

Resolución:

Gráficamente:



De los datos y del gráfico:

$a + b = 7$
$b + c = 6$
$a + b + c + 5 = 16$
$\underbrace{a + b}_{7} + c = 11$
$c = 4;\ b = 2;\ a = 5$

También:
$b + n = 5$
$n = 3$
$a + m = 11$
$m = 6$

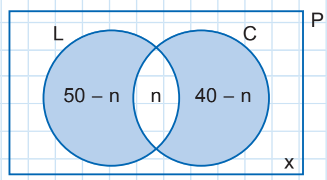
Además:
$8 + \underbrace{m + n}_{9} + p = 19$
$p = 2$

$\therefore$ Solo 2 mujeres aprobaron Comunicación.

8 En una población, 50% toman leche, el 40% comen carne; además solo los que comen carne o solo los que toman leche son el 54%. ¿Cuál es el porcentaje de los que no toman leche ni comen carne?

Resolución:

Supongamos que en total hay 100 personas.



De acuerdo al dato del problema:
$(50 - n) + (40 - n) = 54$
$90 - 2n = 54$
$2n = 36$
$n = 18$

En total:
$(50 - n) + n + (40 - n) + x = 100$
$90 - n + x = 100$
$(90 - 18) + x = 100$
$72 + x = 100$
$x = 28$

$\therefore$ El 28% de la población no toman leche ni comen carne.

Actividades de razonamiento

1. Si los siguientes conjuntos:
$A = \{27; 6^{2x-y}\} \wedge B = \{3^{x+y}; 216\}$ son iguales, halla el valor de $2x + 3y$.

A) 5 B) 8 C) 7 D) 10 E) 6

2. Halla $3x^2 + 2y$; sabiendo que:
$C = \{2x + y; 2y - x; x + 8\}$ es un conjunto unitario.

A) 36 B) 18 C) 20 D) 24 E) 28

3. Dados los conjuntos:
$P = \{x^2 + 1 / x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x < 5\}$
$Q = \{\frac{x-1}{2} / x \in \mathbb{N} \wedge$ x es impar menor que 13$\}$
Halla: $P \cap Q$

A) {5} B) {3; 5} C) {5; 8} D) {3; 8} E) {3; 5; 8}

4. Dados los conjuntos:
$A = \{x \in \mathbb{N} / x = \overset{\circ}{3} \wedge 2 < x < 19\}$
$B = \{x \in \mathbb{N} / x = \overset{\circ}{5} \wedge 3 < x < 28\}$
$C = \{x \in \mathbb{N} /$ x es divisor de 21$\}$
¿Cuántos elementos tiene $A \cup B \cup C$?

A) 10 B) 11 C) 15 D) 18 E) 13

5. Si: $n(A \cup B) = 30$; $n(A - B) = 12$ y $n(B - A) = 8$, halla:
$5[n(A)] - 4[n(B)]$

A) 42 B) 38 C) 48 D) 60 E) 56

6. Para 2 conjuntos A y B se cumple:
$n(A) + n(B) = 16$
$n[P(A)] = 64$
$n[P(A \cup B)] = 4096$
Calcula: $n(B - A)$

A) 8 B) 6 C) 9 D) 5 E) 10

7. De un grupo de 55 personas, 25 hablan inglés, 32 francés, 33 portugués y 5 los tres idiomas. Calcula el número de personas que hablan solo 2 de estos idiomas.

A) 35 B) 30 C) 40 D) 25 E) 50

8. De 32 personas se sabe que 13 ven televisión, 15 escuchan radio y 26 leen periódico. También se sabe que 9 personas solo realizan una de las 3 actividades, mientras que hay 12 que realizan exactamente 2 actividades. ¿Cuántas personas no realizan ninguna de las 3 actividades?

A) 5 B) 3 C) 6 D) 8 E) 4

9. A un grupo de personas se les preguntó sobre el jugo de su preferencia entre jugo de papaya, jugo de fresa y jugo de naranja. 2 respondieron que toman los tres tipos de jugo. 12 prefieren jugo de papaya, 11 jugo de naranja y 19 jugo de fresa. Además 8 toman solo dos de los tres tipos de jugo. Calcula el número total de personas.

A) 30 B) 36 C) 32 D) 40 E) 28

10. De 65 personas que leen por lo menos 2 de 3 periódicos, se observa que: 27 personas leen "El Comercio" y "La República"; 35 personas leen "El Expreso" y "La República" y 33 personas leen "El Comercio" y "El Expreso". ¿Cuántas personas leen los 3 periódicos?

A) 15 B) 20 C) 10 D) 25 E) 12

11. En un colegio se organizan competencias en los deportes de atletismo, gimnasia y natación. De los cuales 200 participan en atletismo, 180 en gimnasia, 240 en natación, 300 en atletismo o gimnasia, 40 en atletismo y gimnasia pero no en natación y 80 solo en natación. ¿Cuántos participan en los 3 deportes?

A) 30 B) 50 C) 60 D) 20 E) 40

12. En un aula de 50 alumnos, aprueban Matemática 30 de ellos, Física también 30, Química 35, Matemática y Física 18, Física y Química 19, Matemática y Química 20, y 10 los 3 cursos. ¿Cuántos no aprueban ningún curso?

A) 2 B) 5 C) 3 D) 1 E) 4

13. De 200 turistas se sabe:
- 64 son norteamericanos.
- 86 son europeos.
- 90 son sudamericanos.

De estos últimos, 30 tenían también nacionalidad norteamericana y 10 nacionalidad europea. ¿Cuántos de los que no son europeos tampoco son norteamericanos ni sudamericanos?

A) 30 B) 26 C) 28 D) 36 E) 40

14. De un grupo de personas que venden camisas, polos, pantalones y chompas se sabe que:
- Ningún vendedor de camisas, vende pantalones.
- 6 solo venden chompas.
- 15 solo venden camisas.
- 23 venden chompas o pantalones pero no polos.
- Ninguno de los que venden polos venden camisas.
- 8 venden solo pantalones.
- 49 no venden chompas.

¿Cuántos vendedores habían en total si 2 vendían camisas y chompas?

A) 58 B) 64 C) 60 D) 54 E) 70

Claves

1. C	5. B	9. A	13. B
2. D	6. B	10. C	14. B
3. A	7. D	11. E	
4. E	8. E	12. A	

Reto



Sean los conjuntos:

$A = \{x + 1 / x \in \mathbb{N}; x < 30\}$

$B = \{x \text{ es par} / x \in A\}$

$C = \{x = k^2 / x \in B \wedge k \in \mathbb{Z}\}$

Calcula la cantidad de subconjuntos binarios de C.

Rpta.: 1

Refuerza practicando

NIVEL 1

Expresa por extensión los siguientes conjuntos:

1. $A = \{2x + 1 / x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x < 3\}$

   A) {1; 2; 3}   B) {5}   C) {3}
   D) {3; 5; 7}   E) {3; 5}

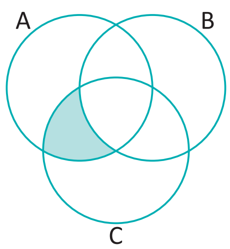
2. $B = \{x^2 - 1 / x \in \mathbb{N} \wedge -1 \leq x < 2\}$

   A) {–1; 0; 1; 2}   B) {–1; 1}   C) {–1; 0}
   D) {–1}   E) {–1; 0; 1}

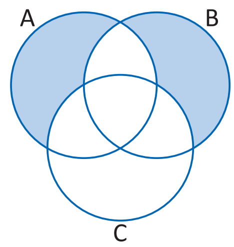
3. $C = \{2x - 1 / x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 9 \wedge x = \overset{\circ}{3}\}$

   A) {–1; 5; 11}   B) {5; 11; 17}   C) {–1; 5}
   D) {–1; 5; 11; 17}   E) {0; 3; 6, 9}

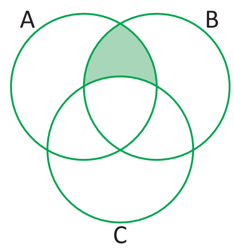
¿A qué operación de conjuntos corresponde los siguientes gráficos?

4. 

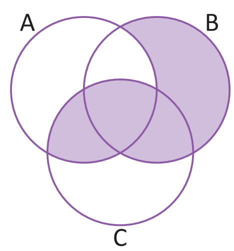
   A) $(B \cap C) - A$ B) $(A \cap B) - C$ C) $(A \cap C) - B$
   D) $(A \Delta B) - C$ E) $(A \cup B) - C$

5. 

   A) $(A \cup C) - B$ B) $(A \Delta B) - C$ C) $(B \Delta C) - A$
   D) $(A \cup B) - C$ E) $(A \cap B) - C$

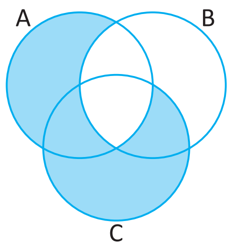
6. 

   A) $(B \cap C) \cap A^C$ B) $(A \cap C) \cap C^C$ C) $(A \Delta B)^C \cap C$
   D) $(A \cap B) \cap C^C$ E) $C^C \cup (A \cup B)$

7. 

   A) $(B \cup C)^C - A$ B) $(A \cap B) - B$ C) $(A \Delta B) - C$
   D) $(A \cup B)^C \cap C$ E) $(A \cup B) - (A - C)$

8



A) $(A \cap B) - (B \cup C)$
B) $(A \cap B)^C - B$
C) $(A \Delta B)^C - C$
D) $(A \cup B) - C$
E) $(A \cap B)^C \cap (C \cup A)$

9 Dado el conjunto:

$A = \{x^2 + 1 / x \in \mathbb{Z}; -3 \leq x < 3\}$

Calcula la suma de sus elementos.

A) 18 B) 10 C) 12 D) 15 E) 16

10 Dado: $A = \{2; 2; 3; 2; 3\}$

¿Cuántos subconjuntos posee?

A) 8 B) 4 C) 6 D) 7 E) 5

NIVEL 2

11 Sean los conjuntos:

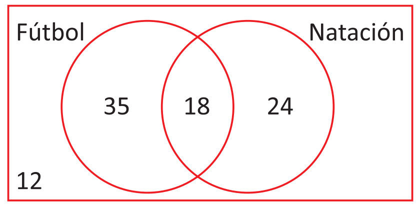
$A = \{1; 2; 3; 5; 7\}$

$B = \{2; 3; 4; 7; 9\}$

Calcula: $n(A \Delta B)$

A) 3 B) 6 C) 4 D) 7 E) 5

El siguiente diagrama de Venn representa a los alumnos matriculados en una academia deportiva. De acuerdo a esta información responda las preguntas.



12 ¿Cuántos alumnos están inscritos en fútbol?

A) 53 B) 55 C) 54 D) 35 E) 49

13 ¿Cuántos alumnos están inscritos en natación?

A) 40 B) 45 C) 41 D) 42 E) 24

14 ¿Cuántos alumnos están inscritos en fútbol o natación?

A) 80 B) 75 C) 70 D) 79 E) 77

15 ¿Cuántos alumnos están inscritos en fútbol y natación?

A) 25 B) 18 C) 20 D) 22 E) 17

16 ¿Cuántos alumnos tiene la academia?

A) 89 B) 85 C) 91 D) 84 E) 87

17. ¿Cuántos alumnos están inscritos solo en natación?

A) 18 B) 23 C) 19 D) 24 E) 20

18. ¿Cuántos no están inscritos en fútbol ni en natación?

A) 13 B) 17 C) 15 D) 21 E) 12

19. Se han reunido 60 personas entre ingenieros y médicos. Concurrieron 42 ingenieros y 38 médicos. Es evidente que hay personas con las dos profesiones. ¿Cuántas son de estas?

A) 20 B) 19 C) 22 D) 16 E) 23

20. En mi salón hay 48 estudiantes. De ellos 31 practican fulbito, 22 practican básquetbol y a 10 no les gusta los deportes con pelotas. ¿Cuántos practican solo uno de los deportes mencionados?



A) 27 B) 23 C) 22 D) 26 E) 25

NIVEL 3

21. El 22% de una población tiene sus hijos en colegios particulares y el 60%, en colegios estatales. Hay padres que tienen parte de sus hijos en uno y otro tipo de colegio. Si el 30% de la población no tiene hijos o sus hijos no están en edad escolar. ¿Qué porcentaje de la población tiene sus hijos en ambos tipos de colegio?

A) 12% B) 13% C) 10%
D) 13% E) 11%

22. En una encuesta realizada en la ciudad, se sabe que al 76% de la población le gusta el pescado y al 83% el chancho. Si al 8% no le agrada ninguno de estos productos, ¿qué porcentaje de la población gusta solo de chancho?

A) 18% B) 16% C) 15%
D) 13% E) 20%

23. Si los conjuntos:

$A = \{3x - 1; 8\}$

$B = \{x^2 + 1; 5y\}$

son unitarios

Calcula: $x + y$

A) 1 B) 3 C) 4
D) 2 E) 5

24. Si el conjunto A es unitario.

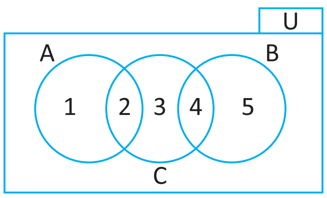
$A = \{2a - 3; 4b - 5; a + b + 6\}$

Calcula: $a + b$

A) 32 B) 28 C) 29 D) 25 E) 20

25. ¿Qué región del diagrama corresponde al resultado de la operación:

$(A^C \cap B) - (B \cap C)$?



A) 2 B) 5 C) 2 y 3
D) 3; 4 y 5 E) 1 y 6

26. El conjunto A tiene 15 subconjuntos propios. Calcula el cardinal de A.

A) 5 B) 8 C) 2 D) 4 E) 1 y 6

27. Si A y B son dos conjuntos incluidos en U, tales que: $n(A) = 15$; $n(B) = 17$ y $n(A \cap B) = 7$. Halla $n(A \triangle B)$.

A) 15 B) 10 C) 17 D) 16 E) 18

28. $n[P(A - B)] = 8$

$n[P(B - A)] = 16$

$n[P(A \cup B)] = 512$

Halla: $n[P(A \cap B)]$

A) 1 B) 4 C) 18 D) 5 E) 2

29. Si: A es un conjunto definido por:

$A = \{\varnothing; 3; 7; 8; \{8\}; \{5; 7\}; \{1; 3; 8\}\}$, indica qué alternativa es incorrecta.

A) $\varnothing \in A$ B) $\{\varnothing\} \subset A$ C) $\{5; 7\} \in A$
D) $\{7; 8\} \subset A$ E) $\{\{5; 7\}; \{8\}\} \in A$

30. Dado el conjunto: $A = \{a; b; \{a; b\}; \{\phi\}; c\}$, indica qué alternativa es incorrecta.

A) $\{c\} \subset A$ B) $\{\phi\} \in A$ C) $\{a; b\} \in A$
D) $\{a; b; c\} \subset A$ E) $\{a; b\} \not\subset A$

Claves

NIVEL 1	9. A	17. D	25. B
1. E	10. B	18. E	26. D
2. C	**NIVEL 2**	19. A	27. E
3. D	11. C	20. B	28. B
4. C	12. A	**NIVEL 3**	29. E
5. B	13. D	21. A	30. E
6. D	14. E	22. B	
7. E	15. B	23. E	
8. E	16. A	24. C	

Psicotécnico

DEFINICIÓN

Los test psicotécnicos son un instrumento para explorar y clasificar el nivel de desarrollo de las capacidades y aptitudes.
Entre las aptitudes a desarrollar tenemos:

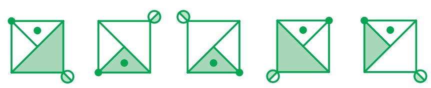
- Aptitud numérica.
- Memoria
- Análisis
- Razonamiento, entre otros.

Veamos a continuación las siguientes aplicaciones para poner en práctica algunas de ellas.

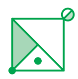
SECUENCIAS GRÁFICAS

Están formadas por figuras ordenadas de acuerdo a criterios lógicos.

Ejemplo:
¿Qué figura sigue?



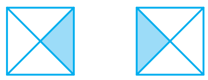
Resolución:
Analizando las figuras, se nota que rotan 90° en sentido antihorario, la bolita interior cambia de lugar entre los dos triángulos pequeños y la sombra rota en sentido horario.

∴ La figura que sigue es: 

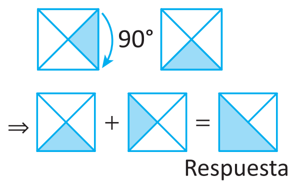
ROTACIÓN DE FIGURAS

Consiste en fijar un punto cualquiera en el plano y tomar otro punto en la figura, haciéndolo rotar a este, un ángulo determinado.

Ejemplo:
Si la figura 1 se rota 90° sobre su centro en sentido horario y luego se traslada sobre la figura 2, ¿qué figura resulta de esta unión?

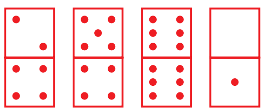

Fig. 1 Fig. 2

Resolución:
Rotaremos la figura 1, 90° en sentido horario, luego la trasladamos sobre la figura 2.

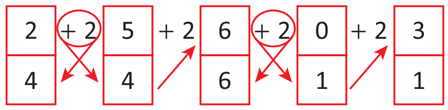


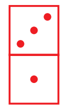
DOMINÓ

Veamos una aplicación:
¿Qué ficha continúa?



Resolución:



∴ La ficha que continúa es: 

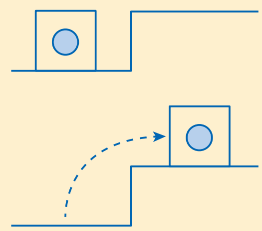
Observación

Para los problemas que involucra dominó se trabaja en base 7.



Atención

Traslación es el movimiento de una figura de un lugar a otro.





Nota

Para ejercicios de razonamiento se asocia las fichas de dominó de tal forma que se represente sucesiones, analogías, etc.

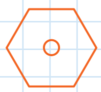
Problemas resueltos

1 ¿Qué figura continúa?

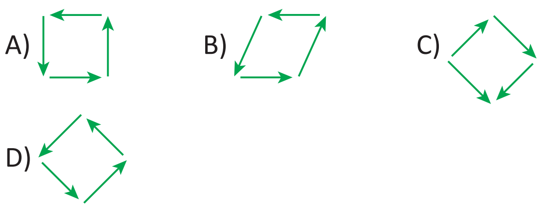


Resolución:

Nos damos cuenta que el número de lados de cada figura va aumentando de uno en uno, y dentro de ellas hay una circunferencia que va alternando su sombreado.
Por lo tanto, la figura que continúa es:

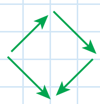


2 ¿Qué figura no guarda relación con las demás?



Resolución:

Nos damos cuenta de que 4 figuras tienen todas sus flechas en un mismo sentido, menos la tercera.
La figura que no guarda relación es:

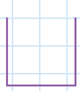


3 Halla la figura que continúa.



Resolución:

Las figuras van girando en sentido horario; por lo tanto, la figura que sigue es:



4 ¿Qué figura no corresponde con las demás?

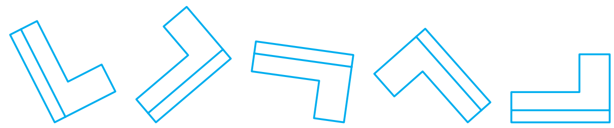


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5

Resolución:

Podemos observar de que todas las figuras son las mismas, solamente han girado, a excepción de la figura número 3, la cual ha dado un giro en el espacio.

5 ¿Qué figura no guarda relación con las demás?

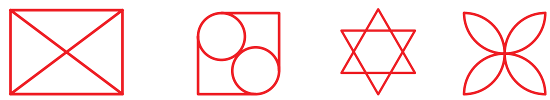
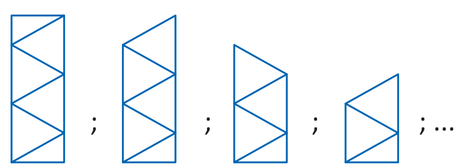


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

Resolución:

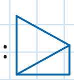
Todas las figuras tienen cuatro regiones a excepción de la figura 3, la cual tiene siete regiones.

6 ¿Qué figura continúa?

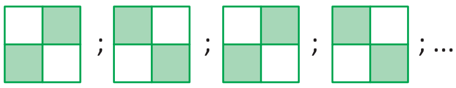


Resolución:

De una figura a otra el número de triángulos disminuye de 1 en 1.

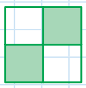
Entonces, la figura que sigue es: 

7 Halla la figura que continúa.

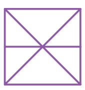


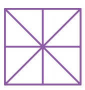
Resolución:

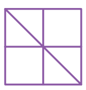
Nos podemos dar cuenta que de una figura a otra las áreas sombreadas giran en sentido antihorario una posición.
Por lo tanto, la figura que continúa es:

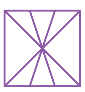


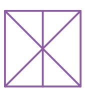
8 De las siguientes figuras, ¿cuál no tiene relación con las demás?


Fig. 1


Fig. 2


Fig. 3


Fig. 4

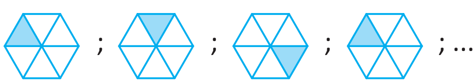

Fig. 5

Resolución:

De las cinco figuras podemos observar que los puntos unidos por cada línea son vértices o puntos medios de los lados.

La figura 4 tiene dos líneas que no unen puntos medios ni vértices, siendo esta la que no guarda relación con las demás.

9 ¿Qué fígura es la que continúa?



A) 

B) 

C) 

D) 

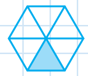
E) 

Resolución:

El triángulo sombreado gira en sentido horario.

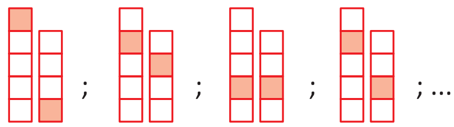
De la primera a la segunda figura avanzó 1 posición; de la segunda a la tercera avanzó 2 posiciones; de la tercera a la cuarta avanzó 3 posiciones.

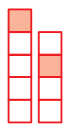
Por lo tanto, de la cuarta a la quinta figura avanzará 4 posiciones, resultando la siguiente figura.

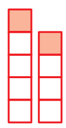


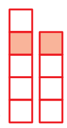
Alternativa A.

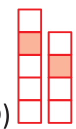
10 Halla la figura que sigue en:

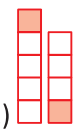


A) 

B) 

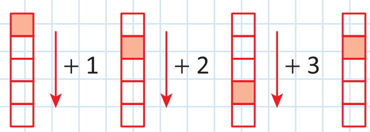
C) 

D) 

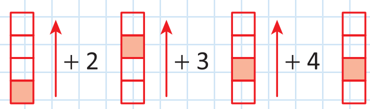
E) 

Resolución:

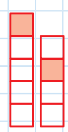
Se observa que el recuadro sombreado de cada una de las primeras columnas de los elementos de la sucesión se desplaza hacia abajo de la siguiente manera:



Analicemos ahora el desplazamiento del recuadro sombreado en las segundas columnas:



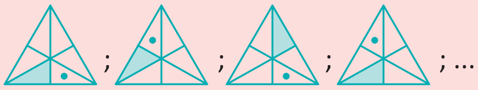
Por lo tanto, la figura que continúa es:

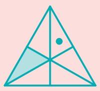
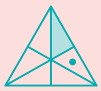
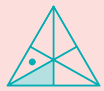


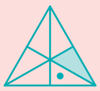
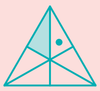
Alternativa A.

Actividades de razonamiento

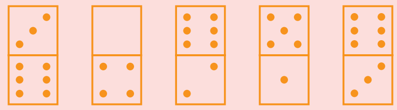
1. ¿Qué figura continúa?



A)  B)  C) 

D)  E) 

2. De las siguientes fichas, ¿cuáles deben ser invertidas para que la suma de los puntos de la parte superior sea el triple de la suma de los puntos de la parte inferior?



1 2 3 4 5

A) 2 y 4 B) 1 y 5 C) 2 y 3
D) 3 y 4 E) 1 y 2

3. ¿Por lo menos cuántos de los círculos numerados deben ser cambiados de posición para que el resultado sea 60?

$\{[(12 - 3) + 8] \div 2\} \times 5$

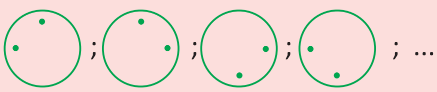
A) 5 B) 2 C) 1
D) 3 E) 4

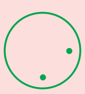
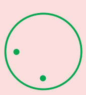
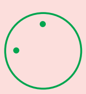
4. ¿Por lo menos cuántos recuadros numerados deben ser cambiados de posición para que el resultado sea el mayor entero posible?

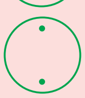
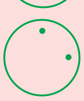
$\{[(4 + 1) - 2] \times 5\} \div 3$

A) 4 B) 0 C) 2
D) 3 E) 1

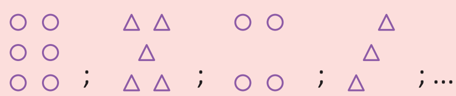
5. Completa la sucesión.



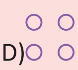
A)  B)  C) 

D)  E) 

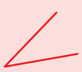
6. Halla la figura que continúa.

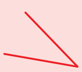


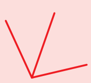
A)  B)  C) 

D)  E) 

7. ¿Qué figura no corresponde con las demás?


Fig. 1


Fig. 2


Fig. 3

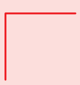

Fig. 4


Fig. 5

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

8. ¿Qué figura no corresponde al grupo?

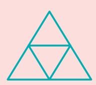
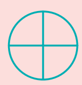

Fig. 1


Fig. 2


Fig. 3

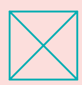

Fig. 4


Fig. 5

A) 5 B) 2 C) 3
D) 4 E) 1

9. De las siguientes figuras, ¿cuál no tiene relación con las demás?

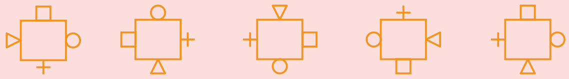


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5

A) 1 B) 3 C) 2
D) 4 E) 5

10. ¿Qué figura no guarda relación con las demás?

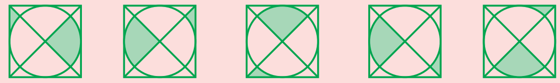
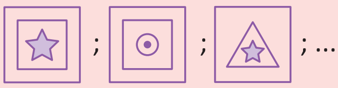
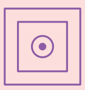


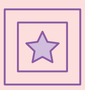
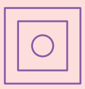
Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5

A) 1 B) 5 C) 4
D) 2 E) 3

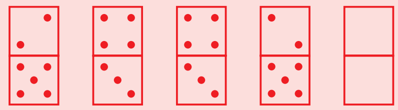
11. Halla la figura que continúa.



A)  B)  C) 

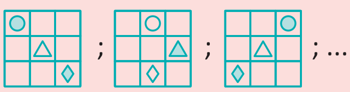
D)  E) 

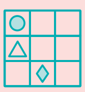
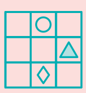
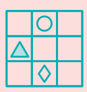
12. Halla la suma de los números que van en el último dominó.

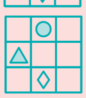
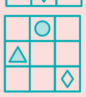


A) 6 B) 7 C) 5
D) 4 E) 8

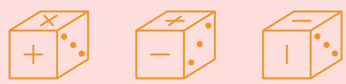
13. ¿Qué figura continúa en la sucesión?

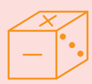
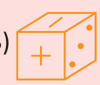
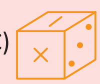


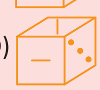
A)  B)  C) 

D)  E) 

14. ¿Qué figura continúa?



A)  B)  C) 

D)  E) 

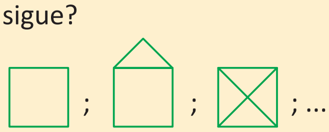
Claves

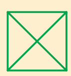
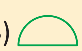
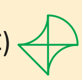
1. D 2. E 3. B 4. C
5. C 6. A 7. C 8. B
9. E 10. D 11. B 12. B
13. C 14. C

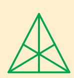
Reto

¿Qué figura sigue?





A)  B)  C) 

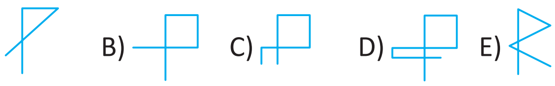
D)  E) 

Rpta.: E

Refuerza practicando

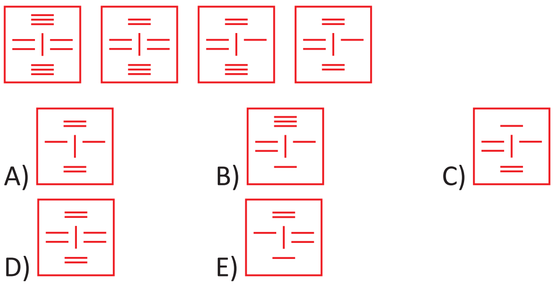
NIVEL 1

1. ¿Qué figura no guarda relación con las demás?



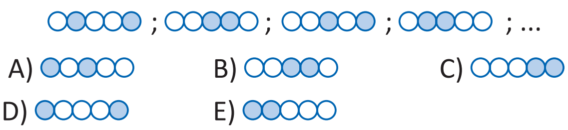
A) B) C) D) E)

2. Indica la figura que continúa.



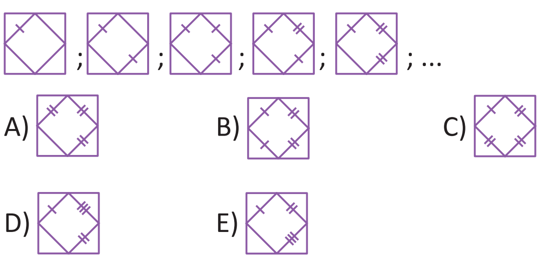
A) B) C) D) E)

3. Halla la figura que continúa.



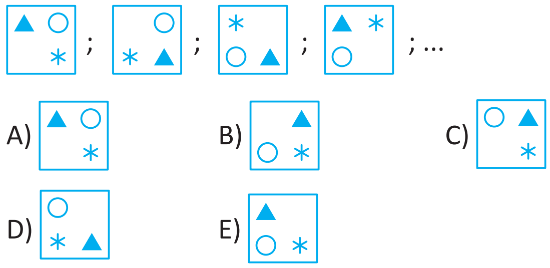
A) B) C) D) E)

4. ¿Cuál es la figura que continúa?



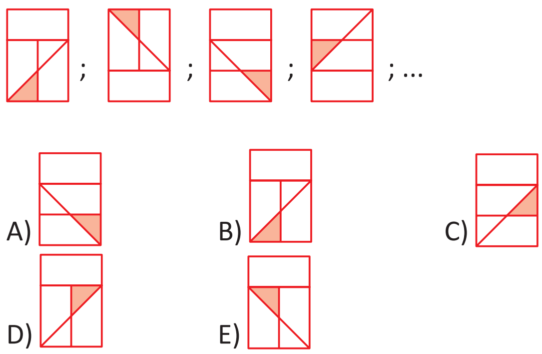
A) B) C) D) E)

5. Halla la figura que continúa.



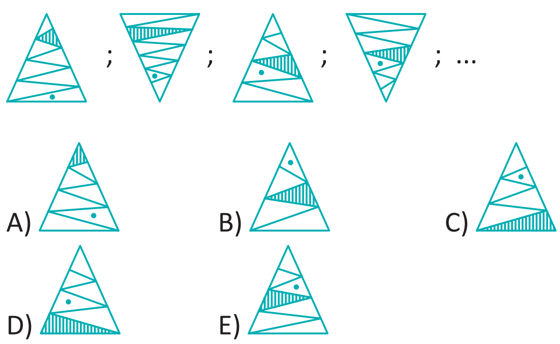
A) B) C) D) E)

6. Halla la figura que continúa.



A) B) C) D) E)

7. Completa la sucesión de figuras.



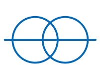
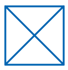
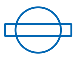
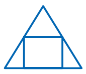
A) B) C) D) E)

NIVEL 2

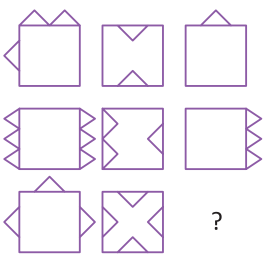
8. Halla el siguiente elemento de la sucesión:
O3D, P5E, R7G,...

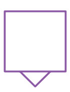
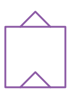
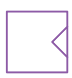
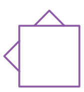
A) S9H B) 79K C) T11IL
D) U9J E) U9K

9. ¿Qué figura no guarda relación con las demás?

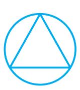
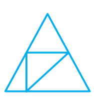
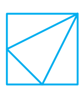
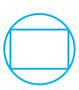
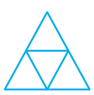
A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

10. Halla la figura que falta.



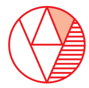
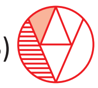
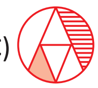
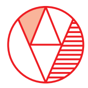
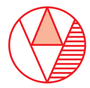
A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

11. Halla la figura que no guarda relación con las demás.

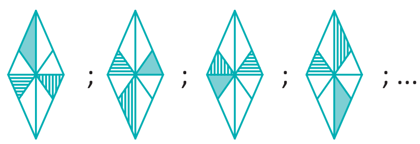
A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

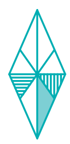
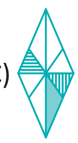
12. Señala la alternativa que continúa en la siguiente sucesión gráfica.



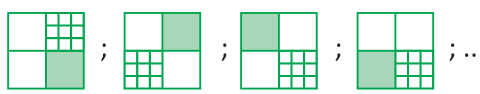
A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

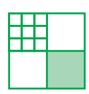
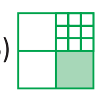
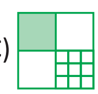
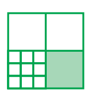
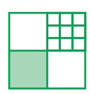
13. Halla la figura que continúa.



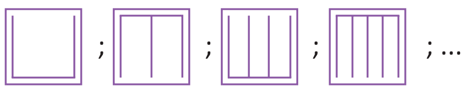
A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

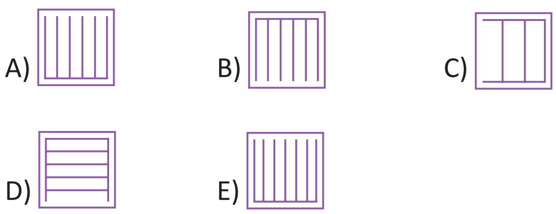
14. Halla el término que continúa.



A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

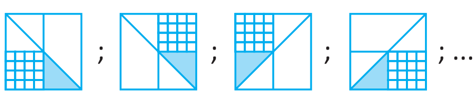
15 Indica la figura que continúa.

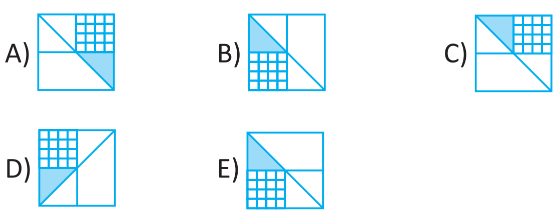




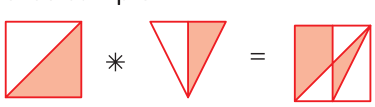
NIVEL 3

16 Halla la figura que continúa.

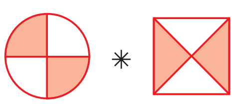


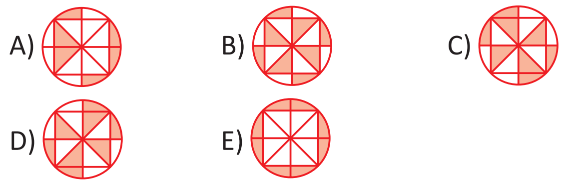


17 Si se cumple:



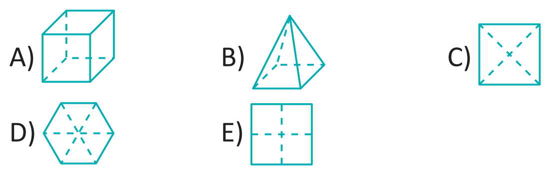
Calcula:



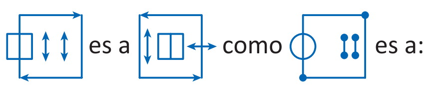


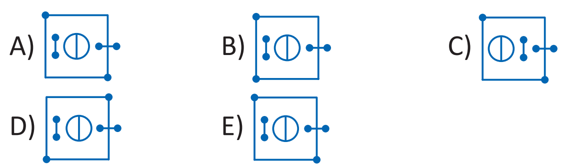
18



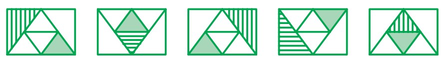


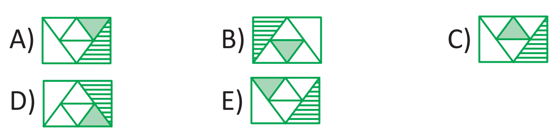
19



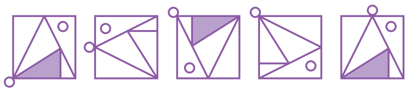


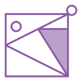
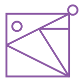
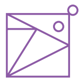
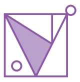
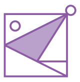
20 Señala la alternativa que continúa en la siguiente serie gráfica.



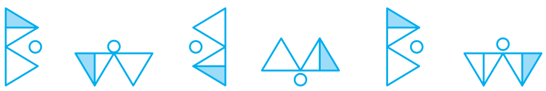


21. En la siguiente pregunta, completa la sucesión de figuras.



A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

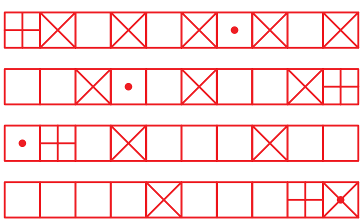
22. ¿Cuál es la figura que no tiene relación con las demás?

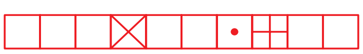
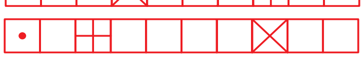
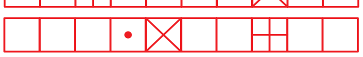
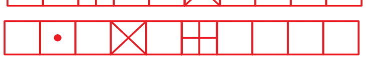


(1) (2) (3) (4) (5) (6)

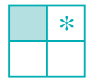
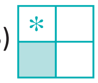
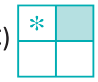
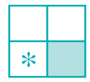
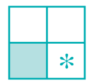
A) 2
B) 6
C) 3
D) 4
E) 1

23. Señala la figura que continúa.



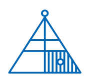
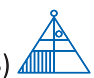
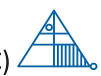
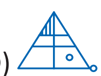
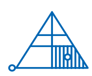
A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

24. Indica la alternativa que contiene una figura que no es coherente con las demás.

A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

25. En la siguiente pregunta, completa la sucesión de figuras.



A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

Claves

NIVEL 1	NIVEL 2		
1. E	8. D	15. A	22. B
2. A	9. B	NIVEL 3	23. D
3. E	10. C	16. C	24. E
4. A	11. D	17. D	25. C
5. A	12. D	18. A	
6. D	13. A	19. E	
7. C	14. D	20. E	
		21. B	

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Aníbal Paredes Editor S.A.C.
Calle San Carlos, mz. B lote 5, urb. Santa Marta, Lima, ATE
RUC 20538732941